

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

32. Band, Heft 1

8. Dezember 1949

S. 1—48

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome:

• Ferrar, W. L.: *Higher algebra for schools*. 2nd impr. London: Oxford University Press 1948. 320 p. 12 s. 6 d. net.

Ein Schulbuch über Algebra für die Oberstufe, aber nicht im Schulbuchstil, sondern im Stil eines wissenschaftlichen Lehrbuches geschrieben und in der Stoffauswahl danach ausgerichtet. Das Buch, das auch zum Selbststudium gedacht ist, enthält aus der Algebra das, was nach neuen englischen Unterrichtsplänen für die angehenden Studierenden der Mathematik und der Naturwissenschaften gemeinsam als erforderlich erachtet wird (eine Fortsetzung nur für Mathematiker ist geplant), und bringt im einzelnen: Division und Zerlegung von Polynomen (unter der Voraussetzung, daß Nullstellen existieren); quadratische Gleichungen und komplexe Zahlen; quadratische Formen (in zwei Veränderlichen); graphische Darstellung von Polynomen (Differentialrechnung vorausgesetzt); binomischer Lehrsatz und Binomialkoeffizienten; Polynome in mehreren Veränderlichen; rationale Funktionen, insbesondere Partialbruchzerlegung und graphische Darstellung; Binomialentwicklung für rationale Exponenten; Exponentialfunktion (durch die Reihe definiert); natürlicher Logarithmus (mittels Integral und Reihe); Prinzip der vollständigen Induktion; Systeme von linearen Gleichungen und Determinanten 2. und 3. Ordnung.
Rohrbach (Mainz).

Niven, Ivan: *Fermat's theorem for matrices*. Duke math. J. 15, 823—826 (1948).

Verf. b stimmt sämtliche Zahlen, die als Ordnungen der Elemente in der multiplikativen Gruppe der regulären Matrizen n -ter Ordnung mit Elementen aus dem Galois-Feld $GF(p^m)$ auftreten. Diese Ordnungszahlen sind durch alle Teiler gewisser angegebener Zahlen erschöpft. Das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen sämtlicher Gruppenelemente ist $p^r v$, wobei r durch $p^r \geq n > p^{r-1}$ definiert ist, und v das k. g. V. von $p^m - 1, p^{2m} - 1, \dots, p^{nm} - 1$ b bezeichnet. Bezüglich der letzteren Zahl beweist Verf. folgenden, an sich interessanten Satz: Bezeichnet $V_k(x)$ das k. g. V. der Polynome $x - 1, x^2 - 1, \dots, x^k - 1$ und a eine natürliche Zahl, so ist $V_k(a)$ immer gleich dem k. g. V. der Zahlen $a - 1, \dots, a^k - 1$.

T. Szele (Dobrecen).

Dwyer, Paul S. and M. S. MacPhail: *Symbolic matrix derivatives*. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 517—534 (1948).

Es sei X die Matrix $[x_{mn}]$ und Y die Matrix $[y_{pq}]$. Dann bezeichnet Verf. $[\partial y_{pq}/\partial x]$ mit $\partial Y/\partial x$ und $[\partial y/\partial x_{mn}]$ mit $\partial y/\partial X$. Es werden systematische Regeln für die Differentiation von Matrixsummen, -differenzen, -produkten, -reziproken und -potenzen abgeleitet. Z. B. erhält man, wenn $Y = AX$ ein Produkt zweier Matrizen ist, von denen A keinen Wert x_{mn} enthält, $\partial Y/\partial x_{mn} = A J_{mn}$ und $\partial y_{pq}/\partial X = A' K_{pq}$, worin J_{mn} (bzw. K_{pq}) eine Matrix mit denselben Dimensionen wie X (bzw. Y) ist und außer dem Einheitselement in der m -ten (bzw. p -ten) Zeile und n -ten (bzw. q -ten) Kolonne nur Nullen enthält. — Die Arbeit enthält auch Tabellen, in denen die Ableitungen von Y nach einem Element von X und eines Elementes von Y nach X für alle diejenigen Y angegeben sind, die Produkte von 2 oder 3 Faktoren sind, wobei ein, zwei oder drei Faktoren X bzw. X' sein können. Zum Schlusse werden die Resultate dazu benützt, bekannte Formeln der statistischen Analyse mehrerer Veränderlicher abzuleiten und in der vorgeschlagenen Bezeichnungsweise auszudrücken.
S. Vajda (Epsom).

Bruijn, N. G. de: Some theorems on the roots of polynomials. *Nieuw Arch. Wiskunde*, II. s. 23, 66—68 (1949).

S_k , $-S_k$ bzw. $S_1 S_2$ bezeichnet den Winkelraum $\varphi_k \leq \arg z \leq \varphi_k + \omega_k$ ($\omega_k \leq \pi$, $k = 1, 2$), das Spiegelbild von S_k in bezug auf die reelle Achse bzw. den Winkelraum $\varphi_1 + \varphi_2 \leq \arg z \leq \varphi_1 + \varphi_2 + \omega_1 + \omega_2$. Enthält S_1 bzw. S_2 die Nullstellen des Polynoms $A(z) = \sum_{k=1}^m a_k z^k$ bzw. $B(z) = \sum_{k=1}^m b_k z^k$, so liegen die Nullstellen

des Polynoms $C(z) = \sum_{k=1}^N k! a_k b_k z^k$ [$N = \min(m, n)$] im Winkelraum $-S_1 S_2$.

Durch diesen Satz wird je ein Satz von Weisner [*Amer. J. Math.* 64, 55—60 (1942)] und von Schur [*J. reine angew. Math.* 144, 75—88 (1914)] verallgemeinert. Enthält der Parallelstreifen $|\operatorname{Im} z| \leq \Delta$ die Nullstellen der Polynome $A(z)$ und $B(z)$ und ist t eine negative Zahl, so enthält er auch die Nullstellen des Polynoms

$$D(z) = \sum_{k=0}^N \frac{t}{k!} A^{(k)}(z) B^{(k)}(z). \quad \text{Gy. Sz.-Nagy (Szeged).}$$

Volnina, N. V.: Über die Reduzibilität von Polynomen in irrationalen Körpern. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, II. s. 58, 1873—1875 (1947) [Russisch].

Bezeichne P einen unendlichen vollkommenen Körper, P_1 eine endliche Erweiterung von P . Nach bekanntem Verfahren lassen sich die in $P_1[x]$ irreduziblen Faktoren eines Polynoms $F(x)$ in $P[x]$ bestimmen, wie man das bei M. Bauer [Über einen Takagischen Satz, *J. reine angew. Math.* 163, 249—250 (1930)] findet. Das Verfahren läßt sich auf den (scheinbar) schwierigeren Fall anwenden, wo ein Polynom $F_1(x)$ in $P_1[x]$ vorgelegt ist, so daß man die Relativnorm von $F_1(x)$ über P bildet und diese in $P_1[x]$ zerlegt. Verf. arbeitet das etwas weitläufig aus und macht dabei die unnötige Einschränkung, daß P der rationale Zahlkörper ist. Rédei.

Erdős, P.: On the number of terms of the square of a polynomial. *Nieuw Arch. Wiskunde*, II. s. 23, 63—65 (1949).

Bezeichne $Q(k)$ ($k = 1, 2, \dots$) die Mindestzahl der Glieder ($\neq 0$) von $f^2(x)$ für alle reellen Polynome $f(x)$ mit genau k Gliedern ($\neq 0$). Ref. warf das Problem auf, ob $Q(k) < k$ möglich ist. Rényi [*Hung. Acta Math.* 1, 30—34 (1947); dies. Zbl. 30, 114] bewies $Q(29) \leq 28$, $\liminf_{k \rightarrow \infty} Q(k)/k = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q(k)/k = 0$ und vermutete $\lim_{k \rightarrow \infty} Q(k)/k = 0$. Verf. beweist sehr leicht sogar $Q(k) < c_2 k^{1-c_1}$ mit kon-

stanten $c_2 > 0$, $0 < c_1 < 1$. Er bemerkt, daß sein Beweis auch für Polynome mit rationalen (statt reellen) Koeffizienten gilt, erwähnt auch, daß er die Vermutung $\lim_{k \rightarrow \infty} Q(k) = \infty$ von Rényi nicht beweisen kann, auch nicht das Problem von

Rényi beantworten, ob $Q(k)$ für Polynome mit rationalen, reellen oder komplexen Koeffizienten dasselbe ist.

Rédei (Szeged).

Carlitz, L.: The singular series for sums of squares of polynomials. *Duke math. J.* 14, 1105—1120 (1947).

Sei p eine ungerade Primzahl, und bezeichne $GF[p^n, x]$ den Polynomring der Unbestimmten x über dem Galois-Feld $GF(p^n)$. Verf. und E. Cohen haben in mehreren früheren Arbeiten die Anzahl der Lösungen der Gleichung $F = \alpha_1 X_1^2 + \dots + \alpha_s X_s^2$ ($\alpha_i \in GF(p^n)$; $X_i, F \in GF[p^n, x]$) in den Unbekannten X_i bestimmt. [L. Carlitz, *Trans. Amer. math. Soc.* 35, 397—410 (1933); *Duke math. J.* 1, 298—315 (1935); dies. Zbl. 6, 389; 12, 193. E. Cohen, *Duke math. J.* 14, 251—267, 543—557 (1947); 15, 501—511 (1948); dies. Zbl. 30, 104, 196]. Die Methoden und die Resultate gestalteten sich aber ganz anders, je nachdem s eine gerade oder ungerade Zahl ist. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß beide Fälle mittels eines Analogons von Hardys „singular series“ eine gemeinsame Behandlung gestatten.

T. Szele (Debrecen).

Carlitz, L.: Representations of arithmetic functions in $GF[p^n, x]$ I. Duke math. J. 14, 1121—1137 (1947).

Carlitz, L.: Representations of arithmetic functions in $GF[p^n, x]$. II. Duke math. J. 15, 795—801 (1948).

Verf. nennt eine eindeutige Funktion $f(A)$, deren Definitionsbereich der Polynomring $GF[p^n, x]$ [der Unbestimmten x über dem Galois-Feld $GF(p^n)$] ist, deren Wertevorrat aber im komplexen Zahlkörper liegt, eine arithmetische Funktion. In einer früheren Arbeit haben Verf. und E. Cohen [Duke math. J. 14, 707—722 (1947); dies. Zbl. 30, 105 — die Arbeit steht dort irrtümlich nur unter dem Namen E. Cohen] drei Arten ($i = 1, 2, 3$) eines Cauchy'schen Produktes C_i für jedes Paar von arithmetischen Funktionen definiert. Ist r eine feste natürliche Zahl, so werden zwei solche Funktionen $f(A), g(A)$ als gleich betrachtet, falls $f(A) = g(A)$ für jedes A vom Grade $< r$ gilt. Dann ist die Menge aller arithmetischen Funktionen bezüglich dieser Gleichheitsdefinition, der gewöhnlichen Addition und C_3 -Multiplikation ein Ring, der die direkte Summe von p^{nr} komplexen Körpern ist. Ferner wird ein Fundamentalsystem von arithmetischen Funktionen (für alle drei Fälle $i = 1, 2, 3$) angegeben, welches gewissen Orthogonalitätsbedingungen genügt und eine eindeutige lineare Darstellung für jede arithmetische Funktion ermöglicht. Als Anwendung der erhaltenen Resultate bestimmt Verf. die Anzahl der Lösungen der Gleichung $F = \alpha_1 X_1^2 + \dots + \alpha_s X_s^2$ ($\alpha_i \in GF(p^n)$; $X_i, F \in GF[p^n, x]$) in den Unbekannten X_i . — In der zweiten Mitteilung wird die in I ausgearbeitete Methode weiterentwickelt und auf die Berechnung allgemeinerer Ausdrücke als in I angewendet.

T. Szele (Debrecen).

Carlitz, L.: Finite sums and interpolation formulas over $GF[p^n, x]$. Duke math. J. 15, 1001—1012 (1948).

Große lateinische Buchstaben bezeichnen Polynome in x mit Koeffizienten aus dem Galois-Feld $GF(p^n)$. Sei t eine weitere Unbestimmte. Verf. zeigt, daß ein Polynom $f(t)$ dann und nur dann der Bedingung

$$(*) \quad f(t + A) = f(t) \quad (\text{für alle } A \text{ vom Grade } < m)$$

genügt, wenn $f(t) = g(\psi_m(t))$ gilt, wobei $g(t)$ ein beliebiges Polynom und $\psi_m(t)$ das Produkt aller $t - A$ mit A vom Grade $< m$ bezeichnet. Ein Polynom von der Form $f(t) = \sum \alpha_i t^i$ wird ein lineares Polynom genannt. [Es gelten dann nämlich offenbar $f(t + u) = f(t) + f(u)$, $f(\beta t) = \beta f(t)$ mit $\beta \in GF(p^n)$.] Ein lineares Polynom genügt der Bedingung (*) dann und nur dann, wenn es von der

Form $f(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \psi_{m+i}(t)$ ist. Auf Grund dieser Tatsachen werden einige „Funktionalgleichungen“ gelöst und manche interessanten Interpolationsformeln angegeben. Von den schönen Anwendungen sei folgendes erwähnt: Ein Polynom $g(t)$ vom Grade $< p^{nm}$ ist dann und nur dann ganzzwertig, wenn $g(M)$ ein Polynom in x mit Koeffizienten aus $GF(p^n)$ für alle M vom Grade $< m$ ist. T. Szele.

Carlitz, L.: q -Bernoulli numbers and polynomials. Duke math. J. 15, 987—1000 (1948).

Verf. definiert die q -Bernoullischen Zahlen β_m durch $\beta_0 = 1, \beta_1 = -1/(q + 1)$ und die symbolische Rekursionsformel $q(q\beta + 1)^m = 0$ ($m > 1$), wobei β^i nach Entwicklung durch β_i zu ersetzen ist. Die Zahlen β_m stimmen für $q = 1$ mit den (gewöhnlichen) Bernoullischen Zahlen überein. Als Verallgemeinerung des Staudt-

Clausen'schen Satzes wird $\beta_m = \sum_{k=2}^{m+1} N_{m,k}(q)/F_k(q)$ bewiesen, wobei $F_k(x)$ das Kreisteilungspolynom vom Index k und $N_{m,k}(x)$ ein ebenfalls ganzzahliges Polynom von der Eigenschaft $(x - 1)^{m-1} N_{m,k}(x) \equiv x F'_k(x) \sum_{1 \leq sk \leq m+1} (-1)^{m+1+sk} \binom{m}{sk-1} \pmod{F_k(x)}$ bezeichnet. Außerdem werden manche andere interessante Formen

hergeleitet. Insbesondere gibt Verf. auch die entsprechenden Verallgemeinerungen der Bernoullischen Polynome, der Stirlingschen Zahlen zweiter Gattung und der Eulerschen Zahlen an. *T. Szele (Debrecen).*

Gruppentheorie:

Liapin, E.: The kernels of homomorphism of associative systems. Mat. Sbornik, II. s. 20, 497—514 u. engl. Zusammenfassg. 514—515 (1947) [Russisch].

In dieser Arbeit wird der Begriff des Normalteilers einer Gruppe mit Hilfe der Theorie der homomorphen Abbildungen auf Halbgruppen verallgemeinert. — \mathcal{G} bezeichne stets eine Halbgruppe mit Einheitsselement $1_{\mathcal{G}}$. Die in \mathcal{G} enthaltenen Unterhalbgruppen, die ihrerseits $1_{\mathcal{G}}$ enthalten, werden als Teilsysteme bezeichnet. Der Durchschnitt von beliebig vielen Teilsystemen ist wieder ein Teilsystem. Homomorphismen und Isomorphismen werden wie üblich definiert. — § 2. Ein Teilsystem \mathcal{N} aus \mathcal{G} heißt normal, wenn für A, B aus \mathcal{G} , N aus \mathcal{N} stets ANB aus \mathcal{N} gleichwertig mit AB aus \mathcal{N} ist. Zum Beispiel sind \mathcal{G} und ferner $1_{\mathcal{G}}$ normale Teilsysteme. Lemma: Aus $A_i \in \mathcal{G}$, $N_i \in \mathcal{N}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) folgt die logische Gleichwertigkeit von $\prod_{i=1}^n A_i \in \mathcal{N}$ und $\prod_{i=1}^n A_i N_i \in \mathcal{N}$. Satz 2. 3: Der Durchschnitt beliebig vieler normaler Teilsysteme ist wieder ein normales Teilsystem. — Der Durchschnitt aller normalen Teilsysteme, die einen gegebenen Komplex von \mathcal{G} enthalten, heißt seine normale Hülle. Diese ist das kleinste den Komplex enthaltende normale Teilsystem. 2. 5: Der Durchschnitt eines Teilsystemes \mathcal{S} mit einem normalen Teilsysteme ist ein normales Teilsystem von \mathcal{S} . — Als Kern eines Homomorphismus φ von \mathcal{G} wird, wie üblich, die Menge der auf $\varphi(1_{\mathcal{G}})$ abgebildeten Elemente aus \mathcal{G} bezeichnet. Er ist ein normales Teilsystem. Die normalen Teilsysteme einer Gruppe stimmen mit den Normalteilern überein. § 3. Zwei Elemente X, Y heißen stark kongruent modulo dem normalen Teilsystem \mathcal{N} , wenn es Elemente X_1, X_2, Y_1, Y_2 in \mathcal{G} und Elemente N_1, N_2 in \mathcal{N} gibt, so daß $X = X_1 X_2$, $Y = Y_1 Y_2$ und $X_1 N_1 X_2 = Y_1 N_2 Y_2$ gilt. Zwei Elemente X, Y heißen kongruent modulo \mathcal{N} , wenn es eine Kette endlich vieler starker Kongruenzen modulo \mathcal{N} gibt, die X mit Y verbindet. \mathcal{G} zerfällt disjunktiv in die Klassen modulo \mathcal{N} kongruenter Elemente (\mathcal{N} -Klassen). 3. 3: Das Produkt zweier \mathcal{N} -Klassen ist in einer \mathcal{N} -Klasse enthalten. Bezeichnen wir mit \bar{X} die \mathcal{N} -Klasse, welche das Element X aus \mathcal{G} enthält, so wird durch die Festsetzung $\bar{X} \cdot \bar{Y} = \overline{XY}$ eindeutig eine Multiplikation der \mathcal{N} -Klassen definiert, vermöge deren die \mathcal{N} -Klassen eine Halbgruppe \mathcal{G}/\mathcal{N} mit \mathcal{N} als Einheitsselement bilden (Faktorsystem von \mathcal{G} nach \mathcal{N}). \mathcal{N} ist der Kern des durch die Abbildung von X auf die \mathcal{N} -Klasse \bar{X} definierten natürlichen Homomorphismus zwischen \mathcal{G} und \mathcal{G}/\mathcal{N} (einfache Homomorphismen). 3. 6: Wenn \mathcal{S} ein Teilsystem von \mathcal{G}/\mathcal{N} ist, so ist die Menge \mathcal{S} der in den Restklassen aus \mathcal{S} enthaltenen Elemente von \mathcal{G} genau dann ein normales Teilsystem, wenn \mathcal{S} ein normales Teilsystem von \mathcal{G}/\mathcal{N} ist. 3. 7: Wenn \mathcal{N} und \mathcal{G}/\mathcal{N} Gruppen sind, so ist auch \mathcal{G} eine Gruppe. — § 4. Ein Teilsystem \mathcal{U} heißt überführend, wenn für A, B aus \mathcal{G} , X aus \mathcal{U} stets die Existenz von 4 Elementen X_1, X_2, X_3, X_4 aus \mathcal{U} folgt, so daß Gleichungen $AXBX_1 = X_2AB$ und $X_3AXB = ABX_4$ bestehen. Zum Beispiel sind \mathcal{G} und $1_{\mathcal{G}}$ überführend. Wenn das Teilsystem \mathcal{U} in \mathcal{G} überführend ist, so auch in jedem Teilsystem zwischen \mathcal{U} und \mathcal{G} . Ein Teilsystem, das mit allen Elementen von \mathcal{G} vertauschbar ist, ist überführend. Die Umkehrung gilt nicht, wie in § 7 gezeigt wird. Z. B. sind die Normalteiler einer Gruppe überführend. — Alle Teilsysteme eines kommutativen Systemes sind überführend. Ein Homomorphismus bildet stets ein überführendes Teilsystem auf ein überführendes Teilsystem des Bildes von \mathcal{G} ab. 4. 3: Der Kern des Homomorphismus von \mathcal{G} auf eine Gruppe ist überführend. — § 5. Wenn das normale Teilsystem \mathcal{N} überführend ist, so ist Kon-

gruenz modulo \mathfrak{N} gleichwertig mit der Existenz von Elementen N, N' aus \mathfrak{N} , für welche die Gleichung $XN = N'Y$ besteht. — X heißt linker (bzw. rechter) Teiler des Komplexes \mathfrak{K} , wenn es Elemente K_1, K_2 in \mathfrak{K} gibt, so daß $XK_1 = K_2$ (bzw. $K_1X = K_2$) ist. Jeder linke Teiler eines überführenden Teilsystemes ist auch rechter Teiler und umgekehrt. 5. 3: Alle Teiler eines überführenden Teilsystemes bilden seine normale Hülle, und diese ist ihrerseits überführend. 5. 4: Die normale Hülle der Vereinigungsmenge überführender Teilsysteme ist gleich der Menge der linken (rechten) Teiler des Quadrates des Komplexproduktes dieser überführenden Teilsysteme in irgendeiner Reihenfolge. — § 6. Ein Homomorphismus mit $1_{\mathfrak{G}}$ als Kern heißt überdeckend (stimmt für Gruppen mit dem Begriff des Isomorphismus überein!). 6. 3: Das Produkt zweier einfacher Homomorphismen (falls definiert!) ist gleich dem Produkt eines einfachen Homomorphismus mit einem Isomorphismus. 6. 3. 2: Das Produkt zweier überdeckender Homomorphismen (falls definiert) ist überdeckend. — Nur der identische Automorphismus ist zugleich einfacher und überdeckender Homomorphismus von \mathfrak{G} . — Jeder Isomorphismus ist überdeckender Homomorphismus. — 6. 4: Jeder Homomorphismus φ läßt sich auf eine und nur eine Weise in das Produkt eines einfachen Homomorphismus α mit einem überdeckenden Homomorphismus β zerlegen. 6. 5: Wenn φG eine Gruppe ist, so ist φ ein Isomorphismus. — Schließlich werden einige einfache Eigenschaften des Begriffes: Der Homomorphismus φ von G ist schwächer als der Homomorphismus ψ von \mathfrak{G} , d. h. $\{\varphi X = \varphi Y\} \rightarrow \{\psi X = \psi Y\}$ (X, Y aus G), gezeigt. — § 7. An Beispielen wird dargelegt, daß überdeckende Homomorphismen nicht notwendig Isomorphismen sind und daß normale Teilsysteme nicht überführend zu sein brauchen.

Zassenhaus (Hamburg).

Whitman, Philip M.: Groups with a cyclic group as lattice-homomorph. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 347—351 (1948).

Nach einleitenden Sätzen über die homomorphe Abbildung von Untergruppen wird der Satz bewiesen: Es seien $L(G)$ und $L(H)$ die Verbände der Untergruppen zweier Gruppen G und H . G sei endlich, H zyklisch von der Ordnung $\prod_{i=1}^m p_i^{a_i}$. Es sei f ein Homomorphismus von $L(G)$ auf $L(H)$. Dann enthält G eine zyklische Untergruppe von der Ordnung $\prod_{i=1}^m q_i^{b_i}$ mit $a_i \leq b_i$ für alle i , welche durch f auf H abgebildet wird. Dabei sind die p_i und q_i Primzahlen. Gg. Reichel (Tübingen).

Amato, Vincenzo: Sul gruppo di monodromia delle equazioni a gruppo algebrico G_s . Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 193—195 (1948).

Es sei S die Substitution $(u_1 u_2 \dots u_r)(u_{r+1} \dots u_{2r}) \dots (u_{(q-1)r+1} \dots u_m)$ von $m = r \cdot q$ Elementen mit der Periode r . G_S sei die Gruppe aller Permutationen, die mit S vertauschbar sind. Verf. betrachtet eine algebraische Gleichung über dem Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten; sie habe die Galoissche Gruppe G_S . Die Monodromiegruppe muß dann ein transitiver Normalteiler von G_S sein. Im Falle $m = 4, r = 2, q = 2$ zählt er alle diese Normalteiler auf.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Haimo, Franklin: A class of inverse limit groups. Amer. J. Math. 71, 171—177 (1949).

Verbände. Ringe. Körper:

Birkhoff, Garrett and Orrin Frink jr.: Representations of lattices by sets. Trans. Amer. math. Soc. 64, 299—316 (1948).

Mit Hilfe einer Erweiterung des Tukeyschen Begriffes „Eigenschaften von finitem Charakter“ [J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology, Princeton 1940; dies. Zbl. 25, 91] beweisen die Verf. im ersten Teil der Arbeit: Ein abstrakter Verband L ist isomorph zu dem Verband A aller Unterlattice einer

abstrakten Algebra mit finiten Operationen dann und nur dann, wenn L 1. ein Vollverband ist; 2. die Bedingung „aus $x_\alpha \uparrow x$ und $y_\beta \uparrow y$ folgt $(x_\alpha \cap y_\beta) \uparrow (x \cap y)$ für beliebige, gerichtete Indizesmengen $(\alpha) (\beta)$ “ erfüllt und 3. jedes Element von L die Vereinigung von \uparrow -unerreichbaren Elementen ist. In Verbänden mit diesen drei Eigenschaften ist jedes Element ein Durchschnitt von \cap -vollreduziblen Elementen. Insbesondere ist L isomorph zum Verband aller Ideale eines abzählbaren Verbandes A dann und nur dann, wenn außer 1., 2., 3. noch gilt: „die \uparrow -unerreichbaren Elemente bilden einen Verband“. Im zweiten Teil der Arbeit behandeln Verff. die Darstellungen von Verbänden durch Mengen von dualen Idealen, d. h. Idealen, die in einem Verband dual zu den gewöhnlichen Idealen erklärt werden. Jede Gesamtheit K von dualen Idealen eines Verbandes L bestimmt eine \cap -Darstellung von L [d. h. eine \cap -homomorphe Abbildung $x \rightarrow R(x)$ zwischen den Elementen $x \in L$ und Mengen $R(x)$ von dualen Idealen]. Diese Darstellung ist isomorph dann und nur dann, wenn für jedes Paar $x, y \in L$ mit $x \neq y$ ein duales Ideal in K existiert, das mindestens ein, aber nicht gleichzeitig beide x, y enthält. Isomorphe \cap -Darstellungen von L erhält man, wenn man jedem $x \in L$ die Gesamtheit aller dualen Ideale (bzw. dualen Hauptideale), die x enthalten, zuordnet. Wünscht man, daß bei diesen isomorphen \cap -Darstellungen möglichst wenige duale Ideale umfassende Gesamtheiten vorkommen, so ordnet man jedem $x \in L$ die Menge aller \cap -vollirreduziblen (bzw. \cap -irreduziblen) dualen Ideale von L zu, die x enthalten. Eine Darstellung durch duale Primideale hat den Vorteil, daß sie gleichzeitig \cap - und \cup -Darstellung ist, sie ist aber nicht isomorph, wenn der Verband nicht distributiv ist. In einem distributivem Verband nämlich sind duale Primideale und irreduzible Ideale identische Begriffe. Darstellungen durch \cap - (bzw. \cap -voll-) irreduzible Ideale sind daher bei distributiven Verbänden identisch mit den bekannten Darstellungen von Stone [Časopis Mat. Fysik, Praha **67**, 1—25 (1937); dies. Zbl. **18**, 3] bzw. von G. Birkhoff [Proc. Cambridge philos. Soc. **29**, 441—484 (1933); dies. Zbl. **7**, 395; auch Bull. Amer. math. Soc. **50**, 764—768 (1944)] durch Primideale (oder, was gleichwertig, durch duale Primideale). In manchen Verbänden kann man isomorphe \cap -Darstellungen durch maximale duale Ideale erreichen. In Booleschen Verbänden, wo Prim- und Maximal-Ideale identische Begriffe sind, ist dies immer möglich. O. Frink [Trans. Amer. math. Soc. **60**, 452—467 (1946)] zeigte, daß dies auch bei jedem komplementären modularen Verband der Fall ist. Verff. zeigen nun, daß dies auch bei jedem Verband, der die Wallmansche Disjunktionseigenschaft [H. Wallman, Ann. Math., Princeton, II. s. **39**, 112—126 (1938); dies. Zbl. **18**, 332] erfüllt, gilt. Zu bemerken ist, daß in einem solchen Verband nicht immer ein jedes \cap -irreduzibles Ideal maximal ist, wie Verff. durch ein Beispiel belegen. Während die Frage der Erhaltung von Durchschnitten beliebig vieler Elemente bei Darstellungen von Verbänden teilweise von Verff. beantwortet ist, entstehen im Falle von Vereinigungen unendlich vieler Elemente mehr Schwierigkeiten. In beiden Fällen bleiben immer noch offene Fragen, wie z. B. die Möglichkeit, isomorphe Darstellungen zu bestimmen, bei welchen Durchschnitte und Vereinigungen von abzählbar unendlich vielen Elementen erhalten bleiben, falls solche im Verband existieren. Speziell für die Boolesche Algebra M/N von meßbaren Mengen mod. Nullmengen ist diese Frage negativ beantwortet [L. H. Loomis, Bull. Amer. math. Soc. **53**, 757—760 (1947)]. Schließlich werden von Verff. Darstellungen eines Verbandes durch Mengen von Elementen des Verbandes untersucht; solche Darstellungen existieren, wenn der Verband die absteigende Kettenbedingung erfüllt.

D. A. Kappos (Erlangen).

Tamari, Dov: On a certain classification of rings and semigroups. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 153—158 (1948).

Nach dem Vorgang von Ore [Ann. Math., Princeton, II. s. **32**, 463—477 (1931); dies. Zbl. **1**, 266] werden in einem Ring \mathfrak{R} folgende Begriffe erklärt. Die Elemente

$a_1, \dots, a_n (\in \mathfrak{R})$ heißen lin. r-unabh. (= linear rechts-unabhängig), wenn aus $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ ($x_i \in \mathfrak{R}$) folgt $x_1 = \dots = x_n = 0$, im anderen Fall heißen a_1, \dots, a_n lin. r-abh. (= linear rechts-abhängig). Entsprechend erklären sich auf Grund von $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ „lin. l-unabh.“ und „lin. l-abh.“. Bezeichne n_r (= Rechtsordnung) und n_l (= Linksordnung) die Höchstzahl der lin. r-unabh. bzw. lin. l-unabh. Elemente in \mathfrak{R} , wobei auch die Fälle $n_r = \infty$, $n_l = \infty$ zuzulassen sind (wenn nämlich die genannten Maxima nicht existieren). Es kann aber nur $n_r = 0, 1, \infty$ sein, denn sind a, b lin. r-unabh. ($n \geq 2$), so folgt aus $a^2 x + a b y + b a z + b^2 t$ [$= a(a x + b y) + b(a z + b t)$] $= 0$ zunächst $a x + b y = a z + b t = 0$, dann $x = y = z = t = 0$, also, daß a^2, ab, ba, b^2 lin. r-unabh. sind, und ähnlich beweist man, daß die 2^k Elemente $a^k, a^{k-1}b, a^{k-2}ba, \dots, b^k$ lin. r-unabh. sind ($n_r \geq 2^k$, also $n_r = \infty$). Ähnliches gilt über n_l ($= 0, 1, \infty$), und so können nur die neun „Ordnungstypen“ $(0, 0), (0, 1), \dots, (\infty, \infty)$ existieren. Die gebliebenen Fälle $n_r = 0, 1, \infty$ lassen sich auch rein multiplikativ charakterisieren: Fall $n_r = 0$ bedeutet, daß alle Elemente Nullteiler sind. Fall $n_r = 1$ bedeutet, daß $n_r \neq 0$ ist und jedes Paar Elemente a, b ein gemeinsames Rechtsmultiplum $ax = by$ hat, ohne daß $x = y = 0$ gilt. Fall $n_r = \infty$ bedeutet, daß $n_r \neq 0, 1$ ist. Deshalb lassen sich n_r und ebenso auch n_l allgemeiner in beliebigen assoziativen Semigruppen \mathfrak{S} erklären. Mit Beispielen wird nachgewiesen, daß die neun Ordnungstypen $(0, 0), (0, 1), \dots, (\infty, \infty)$ sowohl für \mathfrak{S} als auch für \mathfrak{R} wirklich existieren. Rédei (Szeged).

Kaplansky, Irving: Rings with a polynomial identity. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 575—580 (1948).

Verf. beweist als Hauptergebnis: Ein Divisionsring \mathfrak{D} mit einer Polynom-Identität (PI.) $g(x, y, \dots, z) = 0$, wo g ein Polynom über dem Zentrum \mathfrak{F} von \mathfrak{D} ist, das für beliebige x, y, \dots, z aus \mathfrak{D} verschwindet, ist von endlicher Ordnung über \mathfrak{F} . Ist speziell $g(x, y, z) \equiv (xy - yx)^2 z - z(xy - yx)^2$, so ist \mathfrak{D} nach einem Satz von M. Hall [Projective planes, Trans. Amer. math. Soc. **54**, 229—277 (1943)] entweder ein (kommutativer) Körper oder eine Quaternionenalgebra über \mathfrak{F} . Es gilt umgekehrt, daß jede Algebra endlicher Ordnung eine PI. erfüllt, wie zuerst W. Wagner [Math. Ann., Berlin **113**, 528—567 (1937); dies. Zbl. **15**, 170] für Algebren über dem reellen Zahlkörper bewiesen hat. Darüber hinaus zeigt Verf., daß eine algebraische Algebra (deren Elemente algebraisch von beschränktem Grade sind) notwendig eine PI. erfüllt. In Zusammenhang mit dem noch ungeklärten Problem von Kurosch, ob jede algebraische Algebra notwendig „lokal endlich“ sei (d. h. jede aus endlich vielen Elementen erzeugte Teilalgebra endlich sei), beweist Verf., daß jede nilpotente Algebra mit PI. lokal endlich ist. Mit Verwendung eines Satzes von A. A. Albert [On ordered algebras, Bull. Amer. math. Soc. **46**, 521—522 (1940)] folgt: Eine geordnete primitive Algebra mit PI. ist kommutativ; für Algebren über dem reellen Zahlkörper wurde dies bereits von W. Wagner (a. a. O.) bewiesen. Gröbner (Innsbruck).

Arens, Richard F. and Irving Kaplansky: Topological representation of algebras. Trans. Amer. math. Soc. **63**, 457—481 (1948).

Ein Ring, in dem jedes zweiseitige Hauptideal durch ein Idempotent des Zentrums erzeugt wird, heißt biregulär. Er ist stets halbeinfach im Sinne von N. Jacobson [Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945)] und subdirekte Summe einfacher Ringe mit Einheit. Ein Ring heißt stark regulär, wenn zu jedem a ein x mit $a^2 x = a$ existiert. Ein stark regulärer Ring ist biregulär und regulär im Sinne von von Neumann, und jeder Quotientenring nach einem maximalen Ideal ist ein Divisionsring. In jedem stark regulären Ring sind die Rechts- und Linksideale zweiseitige Ideale, jede stark reguläre Banachalgebra ist endlichdimensional. Jede algebraische Algebra ohne nilpotente Elemente ist stark regulär. Hauptziel der Untersuchung ist die Darstellung von Ringen als Gesamtheit von stetigen Funktionen eines topologischen Raumes. Zu diesem Zweck wird nach N. Jacobson [Proc. nat. Acad.

Sci. USA 31, 333—338 (1945)] der Strukturraum eines Ringes A gebildet, dessen Punkte die primitiven Ideale von A sind und in dem die abgeschlossene Hülle einer Menge $\{P_\alpha\}$ von primitiven Idealen die Menge der $\cap P_\alpha$ enthaltenden primitiven Ideale ist. Der Strukturraum S eines biregulären Ringes A ist lokalkompakt und nulldimensional. S ist kompakt dann und nur dann, wenn A ein Einheitsclement besitzt. Ein Ring A ist dann und nur dann die Menge aller stetigen, außerhalb einer kompakten Menge verschwindenden Funktionen eines lokalkompakten, nulldimensionalen Raumes X (seines Strukturraumes) mit Werten in einem diskreten, einfachen Ring R mit Einheit, wenn A biregulär ist und R als Linksoperatorenbereich hat, mit dem Einheitsclement als Einheitoperator in A , und für jedes maximale Ideal M in A die Abbildung von R in $A - M$ ein Isomorphismus von R und $A - M$ ist. Aus diesem Satz werden verschiedene Folgerungen über die Darstellung algebraischer Algebren ohne nilpotente Elemente gezogen. Ein Hauptresultat: A sei eine kommutative, halbeinfache Algebra über einem Körper K ; L sei die separable, algebraische Hülle von K , M die algebraische Hülle von K , G die Galoisgruppe von L/K , $\{L_\alpha\}$ die Menge der Teilkörper von M , die L enthalten. Dann existiert ein lokalkompakter, nulldimensionaler Raum X mit einer Menge $\{X_\alpha\}$ abgeschlossener Teilmengen und eine Darstellung von G durch eine Gruppe G^* von Homöomorphismen von X , so daß gilt: A ist isomorph zur Menge aller stetigen Funktionen f von X in M mit (1) f verschwindet außerhalb einer kompakten Menge, (2) $f(X_\alpha) \subset L_\alpha$, (3) $f[g^*(x)] = g[f(x)]$ für alle $g \in G$ und $x \in X$. Ist G endlich und auflösbar, so gibt es einen Fundamentalbereich von G auf X . — Ein weiteres Ergebnis: A sei eine algebraische Algebra ohne nilpotente Elemente über einem reell abgeschlossenen Körper K . Jedes Ideal in A sei abzählbar erzeugt. Dann gibt es einen lokalkompakten, nulldimensionalen Raum X mit zwei abgeschlossenen Teilmengen $Y \supset Z$, so daß A isomorph der Menge aller stetigen, außerhalb einer kompakten Menge verschwindenden Funktionen mit Quaternionen als Werten ist, die auf Z nur reelle, auf Y nur komplexe Werte haben. — Eine reelle Banach*-Algebra ist eine reelle Banachalgebra, in der eine Operation $*$ erklärt ist mit $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$, $(fg)^* = g^*f^*$, $f^{**} = f$, $\|f\|^2 \leq \|f f^* + g g^*\|^2$. Ist A eine kommutative reelle Banach*-Algebra, so gibt es einen lokalkompakten Hausdorffschen Raum X mit einem involutorischen Homöomorphismus σ , so daß A isomorph dem Ring aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf X ist mit $f(\sigma x) = \overline{f(x)}$. Ferner ist $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ und $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

G. Köthe (Mainz).

Hochschild, G.: On the structure of algebras with nonzero radical. Bull. Amer. math. Soc. 53, 369—376 (1947).

Verf. sucht die Algebren B mit Radikal R , $R \neq (0)$, B/R separabel oder (0) , zu systematisieren. Dazu führt er folgende Begriffe ein. Zwei Algebren B_1 und B_2 mit Radikalen R_1 und R_2 werden verwandt (related) genannt, wenn $B_1/R_1^2 \approx B_2/R_2^2$ und die Minimalexponenten ϱ_1 und ϱ_2 mit $R_1^{\varrho_1} = (0)$, $R_2^{\varrho_2} = (0)$ einander gleich sind. Als A -Modul einer Algebra A über einem Körper F bezeichnet er einen Vektorraum T über F , wenn die Homomorphismen σ und die reziproken Homomorphismen σ^* von A auf die Algebra der linearen Transformationen von T die Bedingung $\sigma(a_1) \sigma^*(a_2) = \sigma^*(a_2) \sigma(a_1)$ erfüllen. Eine Algebra B heißt quasizyklisch, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat: 1. B enthält eine Teilalgebra A , die auf B/R abgebildet wird, so daß R ein A -Modul wird; 2. R als A -Modul hat eine direkte Summenzerlegung in Teilmodulen von Potenzen R_1, R_1^2, \dots, R_1^n , wo $R_1^n \neq (0)$, $R_1^{n+1} = (0)$. Wenn β ein Homomorphismus von B auf eine Algebra A ist, so heißt ferner das Paar (B, β) eine Erweiterung von A , die verwandt genannt wird, wenn A und B verwandt sind. A wird als maximal bezeichnet, wenn β bei jeder verwandten Erweiterung (B, β) von A ein Isomorphismus ist. Eine verwandte Erweiterung (B, β) von A heißt maximal, wenn B maximal ist. Das Hauptergebnis

des Verf. ist der folgende Satz: Sei B eine Algebra mit Radikal R , wo B/R separabel oder (0) ist. Dann gibt es eine maximale verwandte Erweiterung (C, γ) von B , so daß C quasizyklisch ist. Wenn (C_i, γ_i) eine maximale verwandte Erweiterung von B_i ist, so sind C_1 und C_2 zueinander isomorph, wenn B_1 und B_2 verwandt sind.

Harald Bergström (Göteborg).

Levi, F. W.: On skewfields of a given degree. J. Indian math. Soc., II. s. 11, 85—88 (1947).

Ein Ring R hat den Kommutativitätsrang $m = \text{roc}(R)$, wenn alle Determinanten $\sum \pm a_{i_1} \cdots a_{i_r}$ für $r > m$ verschwinden, aber nicht alle für $r = m$. Ist n^2 der Rang des einfachen Ringes R (mit Einselement) über seinem Zentrum, so wird n bereits durch $\text{roc}(R)$ und die Charakteristik von R bestimmt. Für einen Schiefkörper läßt sich daher n kennzeichnen durch Bedingungen für die Elemente der Kommutatorgruppe der multiplikativen Gruppe von R . Für $n = 2$ werden spezielle Ergebnisse hergeleitet.

G. Pickert (Tübingen).

Schmidt, Hermann: Ein Gegenstück zu den Unzerlegbarkeitsätzen von Eisenstein und Dumas für den Fall einer beliebigen Bewertung. Math. Nachr., Berlin 2, 1—3 (1949).

Es sei K ein Körper mit Exponentenbewertung $\omega(a)$, d. h. $\omega(0) = \infty$, $\omega(a)$ reell ($a \neq 0$), nicht überall 0, $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$ [also $\omega(1) = 0$], $\omega(a+b) \geq \min(\omega(a), \omega(b))$. Es sei M der Modul aller $\omega(a)$. Für ein Polynom $f(x) = c_0 x^n + \cdots + c_n$ in $K[x]$ bedeutet das Newtonsche Diagramm Π_f das System der unteren Stützsehn der Punktmenge $(0, \omega(c_0)), \dots, (n, \omega(c_n))$. Nach Ostrowski (dies. Zbl. 6, 294) gelten: (I) Ist K perfekt und $f(x)$ irreduzibel, so ist Π_f geradlinig. (II) Π_{fg} entsteht aus Π_f, Π_g so, daß man die Seiten in der Reihenfolge wachsender Steigung vektoriell aneinanderfügt. Verf. beweist: (III) Ist Π_f geradlinig und hat $f(x)$ in $K[x]$ einen Faktor k -ten Grades, so gilt $k(\omega(c_n) - \omega(c_0))/n \in M$. Im Fall diskreter Bewertung geht dies in einen bekannten Satz von Dumas (noch spezieller von Eisenstein) über. Er bemerkt noch: (IV) Sind

$$\sigma_j = \frac{1}{l_j} (\omega(c_{\kappa_j}) - \omega(c_{\kappa_{j-1}})) \quad (l_j = \kappa_j - \kappa_{j-1}; j = 1, \dots, s; 0 = \kappa_0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_s = n)$$

die Steigungen der Seiten von Π_f und hat $f(x)$ in $K[x]$ einen Faktor k -ten Grades, so ist k von der Form $k = k_1 + \dots + k_s$ mit $k_j \sigma_j \in M$, $0 \leq k_j \leq l_j$ ($j = 1, \dots, s$). Wenn diese Bedingung nur trivial, d. h. mit $k_j = 0$ oder l_j erfüllt werden kann, so hat das wegen (III) zur Folge, daß $f(x)$ in $K[x]$ nur den s Diagrammseiten und ihren vektoriellen Summen [nach (22)] entsprechende Teiler haben kann, die nach (I) bei der perfekten Erweiterung von K gewiß auftreten.

Rédei (Szeged).

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Cugiani, M.: Osservazioni relative alla questione dell'esistenza di un algoritmo euclideo nei campi quadratici. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 136—141 (1948).

Verf. beweist folgendes leichtes Lemma: Ist p eine Primzahl von der Form $kn + h$ und sind h', k', d, z natürliche Zahlen mit

$$h' < k', \quad k' | k, \quad d = (k', h - h'), \quad \left(\frac{-d}{p} \right) = -1, \quad h' \equiv \frac{h - h'}{d} \pmod{\frac{k'}{d}}, \quad d \geq t, \quad p > dtk',$$

so sind die Zahlen $k'm + h'$ ($< p/t$, m natürliche Zahl) nicht lauter quadratische Reste mod p . Mit dieser Hilfe werden einige früher erledigte Fälle des Problems des Euklidischen Algorithmus neu behandelt. Verf. hofft, auch weitere Fälle ähnlich betrachten zu können. Die inzwischen von Davenport gewonnene volle Beantwortung des Problems scheint die Bedeutung der Arbeit herabzudrücken (Ref.). Rédei.

Tietze, Heinrich: Über die Herstellung einer Basis für die ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1944, 147—162 (1947).

Es seien ϑ eine ganze algebraische Zahl n -ten Grades und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n linear unabhängige ganze Zahlen des Körpers $K(\vartheta)$. Es sei ferner D die Körperdiskriminante und $m = \sqrt{D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)/D}$. Schon bei Dedekind (Werke, Bd. III, S. 104) findet man dann den folgenden Satz: Der Modul $[\alpha_1/m, \alpha_2/m, \dots, \alpha_n/m]$ enthält sämtliche ganzen Zahlen des Körpers. Verf. benutzt diesen Satz zur Bestimmung einer Basis des Körpers $K(\sqrt[n]{G})$, wo n und G natürliche Zahlen sind.

Nagell (Uppsala).

Inkeri, K.: Some extensions of criteria concerning singular integers in cyclotomic fields. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I, Nr. 49, 14 S. (1948).

Es handelt sich um die Verallgemeinerung bekannter Kriterien für l -te Idealpotenzzahlen $\alpha \cong \alpha^l$ im Körper $P_1 = P(\zeta_1)$ der l -ten Einheitswurzeln (l ungerade Primzahl) auf den Körper $P_\nu = P(\zeta_\nu)$ der ν -ten Einheitswurzeln ($\nu \geq 1$), sowie um die Anwendung dieser Kriterien auf die Fermatsche Vermutung. Sei $S = (\zeta_\nu \rightarrow \zeta_\nu^r)$ ein erzeugender Automorphismus von P_ν , von der Ordnung $q_\nu = \varphi(l^\nu)$, und

$$R(S) = \sum_{\mu=0}^{q_\nu-1} r_{-\mu} S^\mu, \quad Q(S) = \sum_{\mu=0}^{q_\nu-1} q_{-\mu} S^\mu,$$

wo $r_{-\mu}$ der kleinste positive Rest von $r^\mu \bmod l^\nu$ und $rr_\mu - r_{\mu+1} = q_\mu l^\nu$. Es werde eine Zahl $\alpha \cong \alpha^a$ aus P_ν mit ungeradem a betrachtet. Verf. beweist, daß dann Relationen der Form

$$\alpha^{R(S)} = \zeta_\nu^f \beta^a, \quad \alpha^{Q(S)} = \zeta_\nu^g \gamma^a$$

mit gewissen Exponenten $f, g \bmod l^\nu$ und Zahlen β, γ aus P_ν bestehen, und außerdem speziell für $a = l^{\nu_0}$ ($\nu_0 \leq \nu$) die Relationen

$$\prod_{\substack{q \bmod l^\nu \\ q \equiv 0 \bmod l}} \alpha(\zeta_\nu^q)^{q^{2t-1} B_t} = \delta_t^a \text{ für } t \not\equiv 0 \bmod \frac{l-1}{2},$$

wo B_t die Bernoullischen Zahlen und δ_t Zahlen aus P_ν sind. — Im Spezialfall $\nu = 1$ bilden diese Relationen die Grundlage für die Kriterien von Kummer, Furtwängler u. a. zur Fermatschen Vermutung. Verf. zeigt, wie diese Kriterien etwas anders als bisher in einheitlicher Weise aus der Relation für $\alpha^{Q(S)}$ hergeleitet werden können. Allgemein beweist er folgende Verallgemeinerung des Furtwänglerschen Kriteriums auf die Fermatsche Gleichung $x^{l^n} + y^{l^n} + z^{l^n} = 0$, $(x, y, z) = 1$. Sei

$$Q_\nu(x, y) = \frac{x^{l^\nu} + y^{l^\nu}}{x^{l^{\nu-1}} + y^{l^{\nu-1}}} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

und sei $p_\nu \neq l$ ein gemeinsamer Primteiler von z und $Q_\nu(x, y)$; für jedes ν existiert mindestens ein solcher. Dann ist $p_\nu \equiv 1 \bmod l^{\nu+\nu}$. Hasse (Berlin).

Whaples, George: On a conjecture about infinite class fields. Bull. Amer. math. Soc. 53, 377—380 (1947).

Sei K eine normale Erweiterung über einem Grundkörper k endlichen Grades. Nach einem Satz von R. Brauer ist es bekannt, daß K eindeutig von seinen lokalen Komponenten bestimmt ist, wenn der Grad von K/k endlich ist. Chevalley hat vermutet, daß dies allgemeiner gilt, wenn der Grad von K/k unendlich ist, sofern die Erweiterung abelsch ist. Verf. widerlegt diese Vermutung. Harald Bergström.

Wiman, A.: Über rationale Punkte auf Kurven dritter Ordnung vom Geschlechte eins. Acta math., Uppsala 80, 223—257 (1948).

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der beiden früheren Arbeiten des Verf. über den Rang kubischer Kurven [Acta Math., Uppsala 76, 225—251 (1945) u. 77, 281—320 (1945)]. Es wird gezeigt, wie man beliebig viele Kurven von der Form $y^2 = x(x+a)(x+b)$, wo a und b ganze Zahlen sind, konstruieren kann, die den Rang 5 oder 6 haben, d. h. Rang der abelschen Gruppe der rationalen Punkte auf der Kurve.

Nagell (Uppsala).

Zahlentheorie:

Chowla, S.: Proof of a theorem of Lerch and P. Kesava Menon. Math. Student, Madras 15, 4 (1947).

Die Formel $1^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}$ (p ungerade Primzahl) von M. Lerch [Math. Ann., Berlin 60, 471—490 (1905)] und P. Kesava Menon [J. Indian math. Soc., II, s. 2, 332—333 (1937); dies. Zbl. 17, 340] wird aus der Formel von Daljit Singh [Math. Student, Madras 13, 59—60 (1945)]

$$1^r + \dots + n^r = \sum_{i=1}^r \binom{n+1}{i+1} f_{ri}, \quad f_{ri} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^k (i-k)^r, \quad f_{rr} = r! \quad (r, n \geq 1)$$

hergeleitet. Es folgt nämlich $f_{p-1,i} \equiv (-1)^{i+1} \pmod{p}$ ($i \leq p-2$), also

$$1^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} \equiv (p-1)! + \sum_{i=1}^{p-2} \binom{p}{i+1} (-1)^{i+1} \pmod{p^2}.$$

Die Summe auf der rechten Seite ist gleich p . (Ref. hat einen Vorzeichenfehler verbessert und eine andere Schreibweise verwendet.) Rédei (Szeged).

Szele, Tibor: Une généralisation de la congruence de Fermat. Mat. Tidsskr. B., København 1948, 57—59 (1948).

Es wird folgender Satz bewiesen: Für jede natürliche Zahl $m = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r} > 1$ (p_1, \dots, p_r paarweise verschiedene Primzahlen) hat die Kongruenz

$$F_m(x) = \sum_{d|m} \mu(d) x^{m/d} \equiv 0 \pmod{m}$$

[wobei $\mu(n)$ die Möbiusfunktion bedeutet] jeden beliebigen ganzzahligen Wert von x als Wurzel. — Ist m eine Primzahl, so reduziert sich die Kongruenz auf $x^m - x \equiv 0 \pmod{m}$. (Satz von Fermat). — Verf. gibt drei Beweise dieses Satzes, von denen der erste die bekannten Eigenschaften der μ -Funktion benützt, der zweite auf kombinatorischem Wege erfolgt, der dritte mehr den Charakter einer Verifikation besitzt. Kantz (Graz).

Vijayaraghavan, T. and S. Chowla: On complete residue sets. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 19, 193—199 (1948).

Ein von A. Hurwitz bewiesener Satz [Nouv. Ann. Math., II, s. 1, 389 (1882)] lautet: Ist q eine ungerade Primzahl und r_1, r_2, \dots, r_q sowie s_1, s_2, \dots, s_q zwei irgendwie geordnete Repräsentantenmengen eines vollständigen Restklassensystems nach q , so bilden die q Zahlen $r_1 s_1, r_2 s_2, \dots, r_q s_q$ kein vollständiges Restsystem mod. q . — Verff. dehnen zunächst die Gültigkeit dieses Satzes auf alle natürlichen Zahlen $q > 2$ aus. — Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der Satz: Ist $n > 2$ und $\varphi(n) = h$, so gibt es zu einer geordneten Repräsentantenmenge r_1, r_2, \dots, r_h eines reduzierten Restsystems nach n dann und nur dann eine passend geordnete ebensolche Folge s_1, s_2, \dots, s_h , so daß $r_1 s_1, r_2 s_2, \dots, r_h s_h$ wieder ein reduziertes Restsystem nach n ist, wenn die Abelsche Gruppe der zu n primen Restklassen nicht zyklisch ist. Kantz (Graz).

Zassenhaus, Hans: Über die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Comment. math. Helvetici 22, 232—259 (1949).

Es seien m, l natürliche Zahlen. Verf. beweist mit ausschließlich elementarzahentheoretischen Mitteln und auf finite Weise die Existenz einer natürlichen Zahl $N = N(m, l)$ derart, daß in jeder primen Restklasse mod. m mindestens l Primzahlen $p \leq N$ vorhanden sind; und zwar zeigt sich, daß für $m \not\equiv 0 \pmod{4}$ sicher folgende Wahl von N genügt:

$$N = (9(k+1) C_4)^k,$$

wo

$$C_4 = 3 C_3 \varphi(m)^{\varphi(m)-2}, \quad C_3 = C_2 + \frac{1}{2} \varphi(m),$$

$$C_2 = 2 C_1 - 1 + \varphi(m) (3 + m), \quad C_1 = (4 \varphi(m))^{\varphi(m)},$$

$$k = 6 C_4 \varphi(m) + 18 \cdot 3^{\varphi(m)(l+6)+m}.$$

Der Beweis entsteht aus dem klassischen Dirichletschen Beweis, indem die darin vorkommenden unendlichen Summen und Produkte durch endliche Näherungswerte ersetzt werden. Die Dirichletsche reelle Variable s wird dabei auf bestimmte rationale Werte beschränkt und der Grenzübergang $s \rightarrow 1$ durch eine Restabschätzung ersetzt. Das Arbeiten mit den Charakteren mod. m und mit reell-algebraischen Zahlen der Form n^s ($s = p/q$ rational) wird im Hinblick auf seine finite Begründbarkeit als zulässiges Hilfsmittel angesehen. Statt der im Dirichletschen Beweis vorkommenden

Logarithmen wird mit der Näherungsbildung $l_n(z) = 2^n \sqrt[n]{z} - 1$ gearbeitet. — Wie Verf. am Schluß der Arbeit bemerkt, hat unabhängig von ihm A. Selberg [An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression. Ann. Math., Princeton, II. s. 50, 297—304 (1949)] eine andere elementare Beweismethode für den Dirichletschen Satz entwickelt. *Hasse* (Berlin).

Morrow, D. C.: Universal quaternary quadratic forms. Bull. Amer. math. Soc. 54, 903—904 (1948).

Unter einer universalen quadratischen Form versteht man im allgemeinen eine Form, welche alle positiven und negativen Zahlen eigentlich oder uneigentlich darstellt. Verf. dagegen betrachtet positive Formen, welche imstande sind, alle positiven Zahlen darzustellen und nennt sie universal. Die vorliegende Note gibt lediglich eine kurze Mitteilung über ein ausführliches Manuskript, welches der American Mathematical Society vorgelegt ist und sich die Aufgabe stellt, im quaternären Fall alle derartigen Formen zu ermitteln, was aber dem Verf. nach eigenem Eingeständnis nur unvollkommen gelungen ist. *Brandt* (Halle).

Blij, F. van der: On the theory of simultaneous linear and quadratic representation. I.—V. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 31—40, 41—48, 166—172, 298—306, 390—396 (1947).

Das Kardinalproblem in der Theorie der rationalen quadratischen Formen ist das Problem der Darstellung einer Zahl. Nach dem Vorgang von H. D. Kloosterman [Math. Ann., Berlin 118, 319—364 (1942); dies. Zbl. 26, 202], N. G. de Bruijn [Nieuw Arch. Wiskunde, II. s. 22, 53 (1943)] und anderen koppelt Verf. damit die Darstellung einer weiteren Zahl durch eine Linearform. Haben die beiden Formen den Rang r , so wird man auf ein Darstellungsproblem vom Range $r - 1$ geführt, wobei noch gewisse Nebenbedingungen in Gestalt von Kongruenzen zu erfüllen sind. Nach allgemeinen Erörterungen in den §§ 1—5 wendet sich Verf. zur Durchführung einiger Beispiele. Er betrachtet in § 6 quadratische Formen, welche Diagonalformen sind und dieselben Koeffizienten haben wie die damit gekoppelte Linearform, und wendet sich dann näher zu dem Fall, daß alle diese Koeffizienten den Wert 1 haben. Es handelt sich also darum, daß eine Summe von r Zahlen gleich m und die Summe ihrer Quadrate gleich n zu setzen ist. Dies Problem steht in engem Zusammenhang mit der Darstellung der Zahl $rn - m^2$ durch eine quadratische Form vom Rang $r - 1$, welche unter der zunächst gemachten Annahme, daß r eine Potenz von 2 ist, die Summe von $r - 1$ Quadraten ist (§ 7). Im Fall $r = 2$ besteht vollkommene Äquivalenz (§ 9), im Fall $r = 4$ treten einfache und im Fall $r = 8$ komplizierte Nebenbedingungen hinzu. Die §§ 12—20 sind den Fällen $r = 3, 5, 7$ und 6 gewidmet, der Fall $r = 9$ entzieht sich der Behandlungsmethode des Verf. Zwischendurch werden die Betrachtungen von § 6 im Fall $r = 3$ und 4 auf einige weitere Beispiele angewandt (§§ 14—16). In den Schlußparagraphen 21 und 22 behandelt Verf. 2 Darstellungsprobleme, die mit den vorhergehenden Untersuchungen in einem gewissen Zusammenhang stehen, nämlich die Darstellung als Summe von Polygonalzahlen und die Darstellung durch ternäre kubische Formen, bei welchen ein, aber nicht mehr rationale Faktoren abgespalten werden können. Die Untersuchungen des Verf. sind mit großer Sorgfalt und Voll-

ständigkeit unter Verwendung auch der neueren analytischen Ergebnisse von Siegel durchgeführt. (Ein kleines Versehen, auf S. 47, das dazu geführt hat, daß ein Faktor 2 in der Formel auf S. 47 unten und S. 48 oben ergänzt werden muß, ist von ihm selbst berichtigt worden.) Trotzdem muß gesagt werden, daß die Problemstellung im ganzen unnatürlich ist und keinerlei gesunde Entwicklung erwarten läßt. Das zeigt besonders deutlich der Fall $r = 8$. Während die Stammform für die Summe von 8 Quadraten die elegantesten Eigenschaften hat, welche die Zahlentheorie der rationalen quadratischen Formen beliebiger Ordnung überhaupt bieten kann [vgl. eine Note des Ref., dies. Zbl. 17, 196 (1938)], opfert Verf. diese eleganten Eigenschaften zugunsten der einfachen Schreibweise für die Summe von 8 Quadraten, obschon doch die einfache Schreibweise überhaupt kein zahlentheoretischer Gesichtspunkt ist, verwirrt dann dies Darstellungsproblem durch Koppelung mit der Darstellung durch die Summe der Variablen, wodurch er auf das ohnehin schon komplizierte Darstellungsproblem durch eine Summe von 7 Quadraten geführt wird, das aber hier noch obendrein schwer belastet ist durch zahlreiche Nebenbedingungen, deren Aufstellung und Erörterung 6 Druckseiten erfordert. Brandt (Halle).

Erdős, P.: On the density of some sequences of integers. Bull. Amer. math. Soc. 54, 685—692 (1948).

$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$ sei eine Menge wachsend geordneter, positiver ganzer Zahlen, und für alle $n > 0$ und alle $k > 0$ sei $a_n \nmid a_{n+k}$. Die Menge $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots\}$ bestehe aus allen positiven ganzen Zahlen, die durch mindestens ein a_n teilbar sind. $\varphi(n; x; y_1, y_2, \dots, y_m)$ bezeichne die Anzahl der positiven ganzen Zahlen $c \leq n$, die durch x , aber nicht durch y_1, y_2, \dots, y_m teilbar sind. Verf. beweist, daß \mathcal{B} dann und nur dann eine Dichte besitzt, wenn

$$(1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{n^{1-\varepsilon} < a_i \leq n} \varphi(n; a_i; a_1, a_2, \dots, a_{i-1}) = 0$$

ist. Diese Bedingung ist speziell erfüllt, wenn für die Anzahlfunktion $B(n)$ der Menge \mathcal{B} stets $B(n) < cn/\log n$ gilt, was, wie Verf. weiter zeigt, im folgenden Sinn sogar schon genau ist: Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$. Dann gibt es eine solche Menge \mathcal{A} , daß zwar $B(n) < \psi(n)n/\log n$ ist, \mathcal{B} jedoch keine Dichte besitzt. — Aus (1) folgt weiter, daß stets d.e Dichte einer solchen Menge existiert, die alle Zahlen enthält, die durch zwei gegebene Zahlen d_1, d_2 mit $d_1 < d_2 \leq 2d_1$ teilbar sind. Am Schluß werden noch einige ungelöste Fragen erwähnt. Ostmann (Marburg).

Erdős, P. and I. S. Gál: On the representation of $1, 2, \dots, N$ by differences. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 1155—1158 (1948).

Für eine natürliche Zahl n haben Rényi und Ref. [Mat. Sbornik, II. s. 24, 385—389 (1949)] die ganzen Zahlen $a_1, \dots, a_{k(n)}$ eine Differenz-Basis genannt, wenn alle $1, \dots, n$ in der Form $a_i - a_j$ darstellbar sind. Noch früher beschäftigte sich A. Brauer [J. Elisha Mitchell sci. Soc. 61, 55—66 (1945)] mit dem Fall $0 \leq a_1, \dots, a_{k(n)} \leq n$. Verff. sprechen dann über eine reduzierte Differenz-Basis. In beiden Fällen werde das Minimum von $k(n)$ mit n^* bzw. n_0 bezeichnet ($n^* \leq n_0$). Rényi und Ref. haben $\sqrt[4]{2 + \frac{4}{3\pi}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^*}{\sqrt{n}} = \inf \frac{n^*}{\sqrt{n}} \leq \sqrt[4]{\frac{8}{3}}$ bewiesen. Mit einer Verfeinerung ihrer auf einem Satz von Singer [s. Vijayaraghavan-Chowla, Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A. 15, 194 (1945)] beruhenden Methode erhalten Verff. genau dasselbe Resultat für n_0 statt n^* . Ref. bemerkte 7 leichte Druckfehler (insbesondere hat man stets n_0 für \bar{n} zu lesen). Rédei (Szeged).

Larsen, Otto: Über die additive Zerlegung der Zahl. Mat. Tidsskr. A, København 1948, 72—77 (1948) [Dänisch].

Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 30, 112).

Rédei (Szeged).

Roth, K. F.: Proof that almost all positive integers are sums of a square, a positive cube and a fourth power. J. London math. Soc. **24**, 4—13 (1949).

Es wird gezeigt: Fast jede natürliche Zahl u läßt sich so darstellen:

$$(1) \quad u = x_1^2 + x_2^3 + x_3^4,$$

wo x_1, x_2, x_3 natürliche Zahlen sind. Ist $r(u)$ die Anzahl der (x_1, x_2, x_3) , die (1) erfüllen, so ist

$$\sum_{\substack{u \leq N \\ r(u) > 0}} 1 \leq O(N(\log N)^{-1/20}).$$

Der Beweis wird mittels Fareyzerschneidung geführt. Benützt wird die Arbeit von H. Davenport und Heilbronn [Proc. London math. Soc., II. s. **43**, 73—104 (1937); dies. Zbl. **16**, 246]. Hlawka (Wien).

Halberstam, H.: Four asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London math. Soc. **24**, 13—21 (1949).

Es werden folgende Formeln, welche zuerst von Ingham formuliert wurden, bewiesen:

$$(1) \quad \sum_{\nu=1}^x \varphi(\nu) \varphi(\nu+k) \sim A \frac{x^3}{3} \prod_{p|k} \frac{p^3-2p+1}{p(p^2-2)}$$

für $x \rightarrow \infty$, wo $A = \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^2}\right)$, k fest (φ Eulersche Funktion).

$$(2) \quad \sum_{\nu=1}^{n-1} \varphi(\nu) \varphi(n-\nu) \sim \frac{1}{6} A n^3 \prod_{p|n} \frac{p^3-2p+1}{p(p^2-2)};$$

$$(3) \quad \sum_{\nu=1}^x \sigma_\alpha(\nu) \sigma_\beta(\nu+k) \sim \frac{1}{\alpha+\beta+1} \frac{\zeta(\alpha+1)\zeta(\beta+1)}{\zeta(\alpha+\beta+2)} \cdot \sigma_{-\alpha-\beta-1}(k) x^{\alpha+\beta+1};$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \sigma_\alpha(\nu) \sigma_\beta(n-\nu) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \frac{\zeta(\alpha+1)\zeta(\beta+1)}{\zeta(\alpha+\beta+2)} \sigma_{\alpha+\beta+1}(n) \quad (\alpha, \beta \geq 0; n \rightarrow \infty).$$

Es werden auch Abschätzungen für das Fehlerglied gegeben. So gilt in (1) das Gleichheitszeichen bis auf $O((x \log x)^2)$. Bemerkenswert ist folgendes benutztes Lemma: Ist $f(x) > 0$ und monoton wachsend auf $[a, c]$ dann ist

$$\sum_{\substack{a \leq l < c \\ l \equiv l_0 \pmod{\sigma}}} f(l) - \frac{1}{\sigma} \int_a^c f(x) dx \leq 2 f(c).$$

Hlawka (Wien).

Ward, Morgan: The law of repetition of primes in an elliptic divisibility sequence. Duke math. J. **15**, 941—946 (1948).

[Zum folgenden vgl. Morgan Ward, Memoir on elliptic divisibility sequences, Amer. J. Math. **70**, 31—74 (1948)]. Das Hauptergebnis der Abhandlung ist der sog. Wiederholungssatz für Primzahlen in einer gegebenen elliptischen Teilbarkeitsfolge (im folgenden kurz ETF) h_n : Sei p eine Primzahl > 3 und ihr Rang (bezüglich h_n) $\varrho = \varrho(p) > 3$. Sei p^k die höchste p -Potenz, die in h_ϱ aufgeht. Dann ist der Rang von p^n gleich ϱ oder $p^{n-k}\varrho$, je nachdem $n \leq k$ oder $n \geq k$. Der Satz wird mit Rücksicht darauf, daß eine ETF h_n periodisch ist, wenn $h_{n_0} = 0$ für ein $n_0 > 0$, unter der Voraussetzung $h_n \neq 0$ für $n > 0$ bewiesen. Zum Beweise betrachtet Verf. die Folge $k_n = h_{nr}/h_r$ für festes natürliches r ; k_n ist auch eine ETF. Die Uniformisierung der ETF h_n durch elliptische Funktionen mit gewissen Perioden für den Argumentwert $u = u_0$ und die Relationen, die zwischen den elliptischen Funktionen (mit gleichen Perioden) zu den Argumenten u und ru bestehen, liefern die Darstellung von k_n durch n und die Anfangswerte h_2, h_3, h_4 . Diese Darstellung läßt sich für $r = \varrho(p)$ zu übersichtlichen Kongruenzen nach passenden p -Potenzen

spezialisieren, woraus der Hauptsatz sehr einfach folgt. Als Anwendung ergibt sich: Sind in der ETF h_n die Anfangswerte h_3 und h_4 teilerfremd, so gilt $(h_m, h_n) = h_{(m,n)}$.
Petersson (Hamburg).

Watson, G. N.: A table of Ramanujan's function $\tau(n)$. Proc. London math. Soc., II. s. 51, 1—13 (1949).

Die Koeffizienten $\tau(n)$ der „elliptischen“ Diskriminante

$$x \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n$$

gehören zu den rätselhaftesten Objekten der Arithmetik. Man hat daher alle Veranlassung, dem Verf. für seine große Mühe dankbar zu sein. — Die Rechnung basiert auf folgendem: Hat man $\tau(p)$ für die Primzahlen p , so erhält man die $\tau(p^\alpha)$ ($\alpha \geq 2$) aus $\tau(p^{\lambda+2}) = \tau(p) \tau(p^{\lambda+1}) - p^{11} \tau(p^\lambda)$ ($\lambda \geq 0$) und die $\tau(n)$ aus $\tau(n_1 n_2) = \tau(n_1) \tau(n_2)$ für $(n_1, n_2) = 1$. Entgegen einem Vorschlag Ramanujans erweist sich eine Eulersche Identität zur rekursiven Bestimmung der $\tau(p)$ als vorteilhafter. Diese liefert

$$\sum_{r \geq 0} (-1)^r (n - 1 \pm \frac{25}{2} r - \frac{75}{2} r^2) \tau(n \pm \frac{1}{2} r - \frac{3}{2} r^2) = 0;$$

links ist über alle $r \geq 0$ zu summieren, für die das Argument von τ positiv ausfällt. Der größte Tafelwert ist $\tau(953) = 40033434235820202$. Außer den $\tau(n)$ enthält die Tafel noch die fünfstelligen Näherungswerte von $\tau(n) n^{-11/2}$ ($1 \leq n \leq 1000$).
Petersson (Hamburg).

Mullender, P.: Lattice points in non-convex regions. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 1251—1261 (1948).

Es handelt sich um folgendes Problem: Ist R ein Bereich im R_n , so soll ein Bereich K mit möglichst großem Volumen so bestimmt werden, daß mit P_1, P_2 in K stets $P_1 - P_2$ in R ist. Dann läßt sich der Blichfeldtsche Satz [Trans. Amer. math. Soc. 15, 227—235 (1914)] anwenden und gestattet eine Aussage über Gitterpunkte $\neq 0$ in R . — Mordell [Proc. Akad. Wet. Amsterdam 49, 773—792 (1946)] und der Verf. [dies. Zbl. 31, 113] haben einige R und dazugehörige K bereits angegeben. Diese Untersuchungen werden nun fortgesetzt. R sei definiert durch: $F|x_1|, \dots, |x_n| \leq F(1, \dots, 1)$, wo $F(x) > 0$, $\partial F / \partial x_j > 0$ für $x_1, \dots, x_n > 0$, $F(x+y) \geq F(x) + F(y)$, $F(tx) = tF(x)$ ($t \geq 0$). Dann ist K so definiert: Es sei p ganz, $1 \leq p \leq n$, $n-p = q$ und $k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q$ eine Permutation von $1, \dots, n$. Weiter sei

$$\sum_{j=1}^n F_j(1, \dots, 1) / 2 \sum_{r=1}^p F_{k_r}(1, \dots, 1) = \vartheta, \sum_{r=1}^p x_{k_r} F_{k_r}(1, \dots, 1) / \sum_{r=1}^p F_{k_r}(1, \dots, 1) = x;$$

dann ist $\bar{K}(k_1, \dots, k_p)$ definiert durch $x_{k_1} \leq 1, \dots, x_{k_p} \leq 1, x_{l_1} > 1, \dots, x_{l_q} > 1$, $F(u_1, \dots, u_n) \leq F(1, \dots, 1)$, wo $u_{k_i} = \dots = u_{k_p} = x + \vartheta, u_{l_i} = x_{l_i}, \dots, u_{l_q} = x_{l_q}$. Es ist dann \bar{K} die Summe aller $\bar{K}(k_1, \dots, k_p)$ und K die Menge aller (x_1, \dots, x_n) , für die $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ in K . — Auf Anwendungen wird hingewiesen. *Hlawka*.

Mullender, P.: Lattice points in non-convex regions. III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 50—60 (1949).

Es wird gezeigt, daß das K aus II [vgl. vorsteh. Referat] die geforderte Eigenschaft besitzt. *Hlawka* (Wien).

Rogers, C. A.: The product of n homogeneous linear forms. J. London math. Soc. 24, 31—39 (1949).

Es seien x_1, \dots, x_n n Linearformen in u_1, \dots, u_n mit der Determinante 1. Ferner sei $M(P)$ untere Grenze von $P = |x_1 \dots x_n|$ für alle ganzen Zahlen $u_1, \dots, u_n \neq 0, \dots, 0$. Mit zahlentheoretischen Methoden wird bewiesen:

$$M(P) \leq \frac{(\frac{1}{2} + \log 2) \cdot (n+1)!}{(n \sqrt{e})^n}. \quad \text{Hofreiter (Wien).}$$

Erdős, P. and P. Turán: On a problem in the theory of uniform distribution. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **51**, 1264—1269 (1948).

Es werden jetzt die Beweise von Satz 2 und Satz 3 [vgl. dies. Zbl. **31**, 254] dargestellt. Besonders interessant ist natürlich der Beweis von Satz 3, welcher eine Verschärfung des Satzes von van der Corput-Koksma ist [Koksma, Diophantische Approximationen, Berlin 1936, S. 101; dies. Zbl. **12**, 396]. *Hlawka*.

Erdős, P.: Some remarks on diophantine approximations. J. Indian math. Soc., II. s. **12**, 67—74 (1948).

Mittels einiger bekannter Abschätzungen über die Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung einer reellen Irrationalzahl α und mittels eines Behnkeschen Satzes über die Reziproken $\frac{1}{\{m\alpha\}}$ für natürliche m , wo $\{u\}$ das nächste Ganze an u bezeichnet, verbessert Verf. zunächst Resultate von Chowla [Math. Z. **33**, 544—563 (1935); dies. Zbl. **1**, 325] und schärfer Walfisz [Math. Z. **35**, 774—778 (1935); dies. Zbl. **4**, 34] über die Teileranzahl $d(n)$ und die Anzahlen $r_2(n)$, $r_4(n)$ der Darstellungen von n als Summe von 2 bzw. 4 Quadraten. Er zeigt nämlich, daß in den für fast alle α (d. h. alle α bis auf eine Ausnahmемenge vom Maß 0) gültigen Walfiszschen Abschätzungen

$$\sum_{m=1}^n d(m) e^{2\pi i m \alpha} = O(\sqrt{n} (\log n)^{1+\varepsilon}),$$

$$\sum_{m=1}^n r_2(m) e^{2\pi i m \alpha} = O(\sqrt{n} (\log n)^{1+\varepsilon}),$$

$$\sum_{m=1}^n r_4(m) e^{2\pi i m \alpha} = O(\sqrt{n} (\log n)^{2+\varepsilon})$$

das willkürliche $\varepsilon > 0$ durch 0 ersetzt werden kann. — Mittels eines Khintchine-Ostrowskischen Satzes über Summen von $\frac{1}{\{m\alpha\}}$ behandelt Verf. ferner die Größen-

ordnung der Summe $S(n) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m\{m\alpha\}}$. Nach Spencer [Proc. Cambridge philos. Soc. **35**, 527—547 (1939); dies. Zbl. **22**, 307] ist einerseits $S(n) = O((\log n)^2)$ für fast alle α , und nach Hardy-Littlewood [Bull. Calcutta math. Soc. **20**, 251—266 (1930)] ist andererseits $S(n) = \Omega((\log n)^2)$ für alle irrationalen α . Verf. beweist, daß genau $S(n) = (1 + o(1)) (\log n)^2$ für fast alle α ist, und allgemeiner

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{m^a \{m\alpha\}} = (1 + o(1)) \frac{2^{1-a} \log n}{a}$$

für $0 < a < 1$ und fast alle α . — Schließlich spricht Verf. ohne Beweis noch folgende Behauptungen aus. Für fast alle α ist

$$\sum_{n=1}^x \frac{1}{\sum_{m=1}^n \{m\alpha\}^{-1}} = (1 + o(1)) \frac{\log \log x}{2},$$

so daß insbesondere die $\sum_{n=1}^{\infty}$ für fast alle α divergiert. Ist $f(n)$ eine wachsende Funktion, für die $f(n) > (2+c)n \log n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ konvergent ist, so ist für fast alle α

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\{m\alpha\}} < f(n) \text{ für alle } n > n_0(\alpha).$$

Auf die letzteren beiden Behauptungen ist Verf. durch Arbeiten von Khintchine [Compositio math., Groningen **1**, 361—382 (1935); dies. Zbl. **10**, 341] und Paul Levy [ebenda **3**, 286—303 (1936); dies. Zbl. **14**, 268] gekommen. *Hasse* (Berlin).

Erdős, P.: On arithmetical properties of Lambert series. J. Indian math. Soc., II. s. 12, 63—66 (1948).

Verf. betrachtet die Lambertschen Reihen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

In Verallgemeinerung eines Resultats von Chowla [Proc. nat. Inst. Sci. India 13, 171—173 (1947)], wonach $g(1/t)$ für jedes natürliche $t \geq 5$ irrational ist, beweist er durch Studium der t -adischen Entwicklungen und Anwendung elementarer Primzahlverteilungssätze, daß $f(1/t)$ und $g(1/t)$ für alle ganzen $t \neq 0, \pm 1$ irrational sind. Der Beweis wird nur für

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{t^n}$$

im Falle $t > 0$ im einzelnen durchgeführt; für den Fall $t < 0$ werden die nötigen Modifikationen kurz angedeutet. Für $g(1/t)$ soll sich der Beweis durch Kombination der Chowlaschen Methode mit der des Verf. ergeben. Hasse (Berlin).

Todd, H.: On diophantine approximation to certain exponential and Bessel functions. Proc. London math. Soc., II. s. 50, 550—559 (1949).

Ausgehend von der Aufgabe der simultanen Approximation von s Irrationalzahlen $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ durch rationale Zahlen p_i/q ($i = 1, \dots, s$) wird die Frage nach einem Algorithmus für die p_1, \dots, p_s, q , die die Bedingung des Approximationsatzes von Dirichlet $|p_i - q\Theta_i| < cq^{-1/s}$ ($i = 1, \dots, s$) erfüllen, gestellt. Es wird daran erinnert, daß Jacobi [J. reine angew. Math. 69, 29—64 (1868); Werke VII, 385—426] durch Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus z. B. gezeigt hat, daß für die Zahlen $\Theta_1 = \sqrt[3]{3}$, $\Theta_2 = \sqrt[3]{9}$ eine Folge (t_n) angegeben werden kann, die durch die Differenzengleichung $t_n = 12t_{n-1} + 6t_{n-2} + t_{n-3}$ ($n = 1, 2, \dots$) mit den Anfangswerten $t_{-2} = -4$, $t_{-1} = 1$, $t_0 = 0$ gegeben ist, so daß die Differenz zwischen $t_n\Theta_i$ und der hierzu nächstgelegenen ganzen Zahl für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Hier wird nun gezeigt, daß Lösungen eines gewissen Typs linearer Differenzengleichungen der Ordnung $s+1$ simultane rationale Approximationen von s Irrationalzahlen, die ihrerseits durch die Koeffizienten der Differenzengleichungen und der Anfangswerte bestimmt sind, liefern. In speziellen Fällen können die so definierten Irrationalzahlen einfache Kombinationen von Werten der Exponential- oder der Besselschen Funktionen für rationale Veränderliche sein, wie aus ausgeführten Beispielen hervorgeht. — Die betrachteten Differenzengleichungen haben die Form

$$(1) \quad t_n = b_{n,0} t_{n-1} + b_{n,1} t_{n-2} + \dots + b_{n,s} t_{n-s-1}$$

mit $b_{n,r} = \Delta^r a_{n-r}/r! \alpha^r$ ($r = 0, \dots, s$), $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ und $a_n = \alpha^n n + \beta_1 n^{s-1} + \dots + \beta_s$, wo $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_s$ ganze Zahlen sind, $\alpha > 0$ und $a_n \neq 0$

für jede ganze $n \geq 0$. Mit den Bezeichnungen $f_{n-s} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} 1/(a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+r} r! \alpha^r)$,

$$\psi(n, r) = a_n \dots a_{n+r} \left(f_{n-s-1} - \sum_{m=0}^r \frac{b_{n+m,m}}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m}} f_{n-s+m} \right) \quad \text{für } r = 0, \dots, s \text{ mit}$$

$$\psi(n, -1) = f_{n-s-1}, \quad T_n = \sum_{r=-1}^{s-1} t_{n-r-1} \psi(n-r, r) \text{ und mit der gleichen Definition}$$

von P_n in Größen p_n , wo die Folge (p_n) irgendeine andere Folge ganzer Zahlen, die (1) genügt, ist, lautet der Satz: Die Differenzengleichung (1) besitzt $s+1$ linear unabhängige Lösungen t_n, p_n, q_n, \dots in ganzen Zahlen derart, daß

$$|p_n - t_n P_0/T_0| < A(\varepsilon) t_n^{-1/s+\varepsilon}$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$ und $A(\varepsilon)$ unabhängig von n ist; mit ähnlichen Beziehungen für die anderen Lösungen q_n, \dots . Th. Schneider (Göttingen).

allein die Indizes j_r und k_s nicht übereinstimmen; $F = 0$, wenn die Indizes j und k in mehr als einem Indexpaar nicht übereinstimmen. — Für $n = 3$ und die Bedingungen $x_3(a_1) = c_1$, $x_1(a_2) = c_2$, $x_2(a_2) = c_3$ ($a_1 < a_2$) läßt sich mit Hilfe dieser Tatsachen z. B. beweisen, daß sicher $W \neq 0$ ist, wenn $f_{12}, f_{21}, f_{23}, f_{32} \geq 0$; $f_{13}, f_{31} \leq 0$ ist. — Insbesondere werden behandelt verallgemeinerte zyklische Systeme

$$x'_v = f_{v,v-1} x_{v-1} + f_{v,v} x_v + f_{v,v+1} x_{v+1} \quad (v = 1, \dots, n),$$

wo die Indizes $0, n+1$ gleich $n, 1$ sein sollen, und als Sonderfall hiervon die Gleichung (3)

$$x^{(n)} + A(t)x = 0 \quad (A \text{ stetig für alle reellen } t).$$

Nennt man (3) vom Typus B_v , wenn es für jedes Zahlensystem $t_1 < \dots < t_v$ ein Integral gibt, das an diesen Stellen beliebig gegebene Werte annimmt, und wenn zugleich v die größte Zahl dieser Art ist, so ergibt sich: (3) ist vom Typus $B_{n/2}$, wenn n gerade und $A(t) \geq A_0 > 0$ ist; vom Typus $B_{n/2+1}$, wenn n gerade und $A(t) \leq -A_0 < 0$ ist; vom Typus $B_{(n+1)/2}$, wenn n ungerade und $|A(t)| \geq A_0 > 0$ ist. Vgl. hierzu auch nachsteh. Referat. Kamke (Tübingen).

Biernacki, M.: Sur un problème d'interpolation relatif aux équations différentielles linéaires. Ann. Soc. Polonaise Math. 20, 169—214 (1948).

In der Differentialgleichung

$$(1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$$

seien die Koeffizienten a_v reelle Zahlen; das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$(2) \quad s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0.$$

Die Gleichung (1) heißt vom Typus L_k , wenn es für k beliebige Zahlen $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ und beliebige Zahlen c_1, \dots, c_k stets ein Integral $y(x)$ mit den Werten $y(x_v) = c_v$ ($v = 1, \dots, k$) gibt. Trifft diese Aussage nicht zu, so heißt (1) vom Typus S_k . — Es ist klar, daß (1) immer vom Typus L_1 ist. Ebenso ist leicht zu zeigen, daß (1) vom Typus L_k ist, wenn (2) k reelle Nullstellen, jede in ihrer Vielfachheit gezählt, hat; für $k = n$ ist diese Bedingung zugleich notwendig für das Vorliegen des Typus L_n . Ferner ist (1) genau dann vom Typus L_2 , wenn (2) nur einfache Lösungen hat, wenn diese überdies alle denselben Realteil haben und wenn die Imaginärteile in rationalem Verhältnis stehen. Für die Fälle $3 \leq k \leq n-1$ werden hinreichende Bedingungen angegeben, z. B.: Wenn (2) $p+1$ Paare konjugiert komplexer Nullstellen mit rationalem Verhältnis ihrer Imaginärteile hat, ist (1) vom Typus S_{n-p} . Hat (2) u. a. zwei Systeme von je $k-1$ komplexen Nullstellen (jede in ihrer Vielfachheit gezählt) derart, daß die Imaginärteile jedes Systems, absolut genommen, denselben Wert α bzw. β haben, und ist α/β eine rationale Zahl, so ist (1) vom Typus L_k . Die Gleichung $y^{(n)} + A(x)y = 0$, n gerade, $A(x)$ stetig und größer als eine positive Konstante A_0 , ist vom Typus $S_{\frac{1}{2}n+1}$. Vgl. auch vorsteh. Referat. Kamke (Tübingen).

Brown, B. M.: Solution of differential equations by operational methods. Math. Gaz., London 31, 145—153 (1947).

Zunächst wird ein kurzer Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Operatorenrechnung gegeben (Boole, Heaviside, Carson, Jeffreys), wobei aber die funktionalanalytischen Methoden nur gestreift werden. Dann werden rationale Funktionen des Operators $D = d/dt$ erklärt, und zwar bezeichnet, wenn

$R(D)$ ein Polynom r -ten Grades mit festen Koeffizienten bedeutet, $\frac{1}{R(D)}u$ die allgemeine Lösung (r -parametrische Lösungsgesamtheit) der Differentialgleichung (1) $R(D)y = u$. Für ein beliebiges $F(D) = Q(D)/R(D)$ wird gesetzt $F(D)u = \frac{1}{R(D)}\{Q(D)u\}$, was im allgemeinen von $Q(D)\left\{\frac{1}{R(D)}u\right\}$ verschieden ausfällt.

Entsprechend hat beim Erweitern und Kürzen Vorsicht zu walten. Demgegenüber werden rationale Funktionen $F(p)$ des Operators p (der nicht wie bei der Methode

der Funktionaltransformation durch eine komplexe Veränderliche ersetzt wird) so eingeführt, daß $\frac{1}{R(p)}$ u die partikuläre Lösung von (1) mit der Anfangsbedingung (2) $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(r-1)}(0) = 0$ vorstellt. Die genaue Reziprozität zu $R(p)$ wird dann durch die allgemeine Definition $R(p) y = R(D) y$ erzwungen, bei der aber nur Funktionen y zulässig sind, die (2) erfüllen. Bei sinnngemäßer Forderung entsprechender Zulässigkeitsbedingungen gelten dann die Rechenregeln für rationale Funktionen. Es folgen noch Beispiele und Bemerkungen über die Deutbarkeit von Reihentwicklungen (nach steigenden Potenzen von D oder fallenden Potenzen von p , wie leicht nach obigem einleuchtet!). *Hermann Schmidt* (Braunschweig).

Kasner, Edward and John de Cicco: Osculating conics of the integral curves of third order differential equations of the type (G). *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **35**, 43—46 (1949).

Les A. continuent leurs études sur les courbes intégrales de l'équation différentielle (1) $y''' = G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y''^2$ par un travail élémentaire sur les coniques osculatrices à ces courbes en un élément linéaire E . Ils envisagent les ∞^1 courbes intégrales de (1) qui admettent l'élément E aussi que la famille des coniques osculatrices à ces courbes le long de E et étudient l'enveloppe de cette famille de coniques ainsi que le lieu de leurs centres et de leurs foyers. Une application est signalée aux trajectoires dynamiques. *Lichnerowicz* (Strasbourg).

Imai, Isao: On a refinement of the W. K. B. method. *Physic. Rev., Lancaster Pa.*, II. s. **74**, 113 (1948).

Für die Differentialgleichung (1) $d^2\Phi/dx^2 + k^2 P(x)\Phi = 0$ (k groß) wird eine Vergleichsdifferentialgleichung angegeben, welche mit (1) in der Umgebung einer Nullstelle von $P(x)$ genauer übereinstimmt als eine von Langer [dies. Zbl. **1**, 60; **5**, 158] angegebene. Auch sie läßt sich durch Zylinderfunktionen vom Index $\frac{1}{2}$ streng lösen. *J. Meixner* (Aachen).

Variationsrechnung:

Sloovere, H. de: Note sur les multiplicateurs de Lagrange dans la résolution des problèmes posés par le calcul des variations. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. s. **34**, 735—747 (1948).

L'A. mostra che il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, applicato da Th. de Donder [*Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. s. **29** (1943)] al calcolo delle estremali di due problemi variazionali conduce a quelle stesse equazioni differenziali che si ottengono con il metodo classico. Il primo problema ha come oggetto l'integrale

$$I_n = \int_{(n)} I(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha, y_{ij}^\alpha, \dots, y_{i_1 \dots i_{(\alpha)}}^\alpha) d(x^i) \quad (i, j, \dots, i_{(\alpha)} = 1, 2, \dots, n; \alpha = 1, 2, \dots, m),$$

al quale si impongono p (con $p < m$) condizioni che devono essere soddisfatte sulla frontiera $(n-1)$ del dominio (n)

$$Y_\pi(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha, y_{ij}^\alpha, \dots, y_{i_1 \dots i_{(\beta)}}^\alpha) = 0 \quad (\pi = 1, 2, \dots, p).$$

Nel secondo problema si impongono all'integrale I_n p (con $p < m$) condizioni che devono essere soddisfatte nel dominio (n)

$$Y_\pi(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha, \dots, y_{i_1 \dots i_{(\beta)}}^\alpha) = 0 \quad (\pi = 1, 2, \dots, p), \quad \text{con } (\beta) = (\alpha) - 1$$

S. Cinquini (Pavia).

Hestenes, Magnus R.: An indirect sufficiency proof for the problem of Bolza in nonparametric form. *Trans. Amer. math. Soc.* **62**, 509—535 (1947).

L'A. dà alcuni complementi per assicurare che i risultati da lui ottenuti [Trans. Amer. math. Soc. **60**, 93—118 (1946)] con il metodo di McShane [Trans. Amer. math. Soc. **52**, 344—379 (1942)] per il problema di Bolza in forma parametrica possono essere utilizzati anche nel caso della forma ordinaria. — Il pro-

blema variazionale in questione è quello di minimizzare una funzione

$$I(C) = g(a) + \int_C f(a, x, y, \dot{y}) dx,$$

in una classe di curve $C: a^h, y^i(x)$ ($x^1 \leq x \leq x^2$, $h = 1, \dots, r$; $i = 1, \dots, n$), soddisfacenti alle condizioni

$$(1) \quad \Phi^\beta(a, x, y, \dot{y}) = 0, \quad (\beta = 1, \dots, m, \text{ con } m < n),$$

$$(2) \quad x^s = X^s(a), \quad y^i(x^s) = Y^{is}(a) \quad (s = 1, 2).$$

L'A., che si attiene alla terminologia del proprio lavoro già citato, chiama curve C ammissibili quelle definite da funzioni $y^i(x)$ ($x^1 \leq x \leq x^2$) assolutamente continue, con $\dot{y}^i(x)$ a quadrato integrabile e tali inoltre che, per quasi tutti gli x di (x^1, x^2) , $[a, x, y(x), \dot{y}(x)]$ appartenga al campo R in cui sono definite le funzioni f e Φ^β . — Considerata una curva ammissibile $C_0: a_0, y_0(x)$ ($x^1 \leq x \leq x^2$) di classe C'' e soddisfacente alle condizioni (1) e (2), l'A. suppone che la matrice $||\Phi_{p^i}^\beta||$ abbia rango m lungo la curva C_0 e che esista un insieme di moltiplicatori non identicamente nulli $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda^\beta(x, b)$ della classe C' tali che, posto

$$F(a, x, y, p, \lambda) = \lambda^0 f(a, x, y, p) + \lambda^\beta \Phi^\beta(a, x, y, p), \quad G(a) = \lambda^0 g(a),$$

le equazioni

$$F_{p^i} = F_{y^i}, \quad G_h + [(F - y^i F_{p^i}) X_h^s + F_{p^i} Y_h^{is}]_{s=1}^2 + \int_{C_0} F_{a^h} dx = 0$$

siano soddisfatte lungo C_0 . — Viene introdotta la funzione

$$H(a, x, y, p, b) = \lambda^0 f + \lambda^\beta(x, b) \Phi^\beta + \Theta(a, x, y, p) \Phi^\beta \Phi^\beta,$$

vengono indicate rispettivamente con $E_H(a, x, y, p, b, q)$ e $E_L(p, q)$ le funzioni E di Weierstrass relative alle funzioni $H(a, x, y, p, b)$ e $L(p) = \sqrt{1 + p^i p^i}$, e viene chiamato B l'insieme di tutti gli elementi $b = (b^1, \dots, b^l)$ per cui esiste una costante $\tau > 0$ e un intorno D_0 di C_0 in modo che sia verificata la disuguaglianza $E_H(a, x, y, p, b, q) \geq \tau E_L(p, q)$, quando (a, x, y, p) appartiene a D_0 e (a, x, y, q) a quel sottoinsieme di R in cui è $\Phi^\beta = 0$. — Ciò premesso, considerata la funzione

$$J(C, b) = G(a) + \int_C H(a, x, y, \dot{y}, b) dx,$$

l'A. prova che la funzione $\Theta(a, x, y, p)$ può essere scelta in modo che esista un intorno I di C_0 tale che, se $C \neq C_0$ è una curva ammissibile, appartenente a I e soddisfacente alle condizioni terminali (2), ci sia un elemento b di B per cui è

$$J(C, b) > J(C_0, b). \quad S. Cingini (Pavia).$$

Karush, William: A semi-strong minimum for a multiple integral problem in the calculus of variations. Trans. Amer. math. Soc. **63**, 439—451 (1948).

L'A. considera l'integrale

$$I(s) = \int_A f(x, z, p) dx,$$

dove x indica il vettore (x^1, \dots, x^n) , p il vettore (p^1, \dots, p^n) e dx il prodotto $dx^1 \dots dx^n$; A è un campo a n dimensioni aperto, limitato, connesso; è $z = z(x^1, \dots, x^n)$ e inoltre $p^i = \partial z / \partial x^i$ ($i = 1, \dots, n$). Per il seguito è convenuto che un indice ripetuto sottintende la sommazione rispetto all'indice stesso. — Una superficie $z = z(x)$ viene chiamata ammissibile se: (i) è lipschitziana nel campo chiuso \bar{A} costituito da tutti i punti di A e da quelli della sua frontiera C ; (ii) (x, z, p) appartiene al campo di definizione di f quando x è un punto di A ed esistono tutte le derivate parziali p^i ; (iii) esiste l'integrale $I(s)$. — Si chiama estremaloide una superficie $S_0: z = z_0(x)$ della classe C' , per la quale vale, per ogni cubo R ad n dimensioni contenuto, insieme con la sua frontiera R^* , nel

campo A , la relazione

$$\int_R f_z dx = \int_{R^*} f_{p^i} v^i ds,$$

ove $v = (v^1, \dots, v^n)$ è la normale a R^* , ds l'elemento d'area a $n-1$ dimensioni su R^* , e le derivate parziali di f sono calcolate su S_0 . Una superficie si dice non singolare, se il determinante $|f_{p^i p^j}|$ è diverso da zero in ogni punto di S_0 . La superficie S_0 soddisfa alla condizione di Weierstrass $\Pi_{N;M}$ con costante $M > 0$, se: (i) è $p_0^i(x) p_0^i(x) < M$ per x in \bar{A} , ove $p_0^i = \partial z_0 / \partial x^i$; (ii) esiste nello spazio (x, z, p) un intorno N del valore (x, z_0, p_0) appartenente a S_0 in modo che, posto

$$E(x, z, p, P) \equiv f(x, z, P) - f(x, z, p) - (P^i - p^i) f_{p^i}(x, z, p),$$

la disuguaglianza $E(x, z, p, P) \geq 0$ è verificata, quando (x, z, p) appartiene a N , (x, z, P) appartiene al campo di definizione di f ed è $P^i P^i < M$. — La superficie S_0 soddisfa alla condizione stretta di Jacobi, se esiste una costante $\gamma > 0$ tale che sia

$$I_2(\zeta) \geq \gamma \int_A \zeta^2 dx,$$

per ogni variazione $\zeta(x)$ lipschitziana in \bar{A} e che si annulla su C e ove si è indicata con $I_2(\zeta)$ la variazione seconda di $I(S)$ su S_0 . — Ciò premesso, l'A. dimostra il seguente teorema: Sia $S_0: z = z_0(x)$ un' estremaloide non singolare, soddisfacente alla condizione stretta di Jacobi; e sia $M > 0$ una costante finita tale che S_0 soddisfi alla condizione di Weierstrass $\Pi_{N;M}$. Allora esiste un $\varepsilon > 0$ e nello spazio (x, z) un intorno Γ di S_0 tale che la disuguaglianza

$$I(S) - I(S_0) > \min \{ \varepsilon, \varepsilon \int_A [(z - z_0)^2 + (p^i - p_0^i)(p^i - p_0^i)] dx \}$$

è verificata per ogni superficie ammissibile $S: z = z(x)$, distinta da S_0 che giace in Γ , coincide con S_0 sulla frontiera C , e soddisfa alla condizione $p^i p^i < M$ per quasi tutti gli x di A . La dimostrazione di questo teorema viene data con un procedimento sviluppato per gli integrali semplici da Mc.Shane [Trans. Amer. math. Soc. **52**, 344—379 (1942)], Myers [Duke math. J. **10**, 73—97 (1943)], e Hestenes [Trans. Amer. math. Soc. **60**, 93—118 (1946)].

S. Cinquini (Pavia).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Horn, Alfred: The asymptotic behavior of solutions of systems of Volterra integral equations. Trans. Amer. math. Soc. **63**, 144—174 (1948).

Es sollen asymptotische Entwicklungen aufgestellt werden für die Lösung des folgenden Systems Volterrasercher Integralgleichungen:

$$(1) \quad u_i(x, y, \lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda \int_y^x K_{ij}(x, t, \lambda) u_j(t, y, \lambda) dt + f_i(x, y, \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wenn asymptotische Entwicklungen der Form

$$(2) \quad \begin{aligned} K_{ij}(x, y, \lambda) &= K_{ij}^{(0)}(x, y) + \lambda^{-1} K_{ij}^{(1)}(x, y) + \dots, \\ f_i(x, y, \lambda) &= f_i^{(0)}(x, y) + \lambda^{-1} f_i^{(1)}(x, y) + \dots \end{aligned}$$

bestehen. In Matrizenschreibweise wird statt (1) geschrieben

$$(2, 1) \quad u(x, y, \lambda) = \lambda \int_y^x K(x, t, \lambda) u(t, y, \lambda) dt + f(x, y, \lambda),$$

statt (2) zunächst

$$(2, 2) \quad \begin{aligned} K(x, y, \lambda) &= \sum_{i=0}^k \lambda^{-i} K^i(x, y) + \lambda^{-k-1} K'(x, y, \lambda), \\ f(x, y, \lambda) &= \sum_{i=0}^k \lambda^{-i} f^i(x, y) + \lambda^{-k-1} f'(x, y, \lambda); \end{aligned}$$

diese Entwicklungen mögen für eine ins Unendliche reichende Punktmenge Z der komplexen λ -Ebene und für das Gebiet T ($\alpha \leq y \leq x \leq \beta$) gelten; die K^i und f^i seien von der Klasse C^{k+1-i} in T [d. h. $(k+1-i)$ -mal stetig differenzierbar], K' und f' seien stetig in T . Fundamentalvoraussetzung: Die charakteristischen Wurzeln $\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)$ der Matrix $K^0(x, x)$ seien voneinander und von Null verschieden im Intervall I ($\alpha \leq x \leq \beta$). Es sei $k \geq 1$ und K^0 mindestens von der Klasse C^2 . — Transformation: In der p -ten Spalte der Matrix $C(x)$ stehe ein charakteristischer Vektor $c^p(x)$ zu $\gamma_p(x)$. $C(x)$ ist von der Klasse C^{k+1} . Man setze $u(x, y, \lambda) = C(x) v(x, y, \lambda)$, $R^i(x, y) = C^{-1}(x) K^i(x, y) C(y)$, $R'(x, y, \lambda) = C^{-1}(x) K'(x, y, \lambda) C(y)$, $h^i(x, y) = C^{-1}(x) f^i(x, y)$, $h'(x, y, \lambda) = C^{-1}(x) f'(x, y, \lambda)$; dann geht (2, 1) über in

$$(2, 3) \quad v(x, y, \lambda) = \lambda \int_y^x R(x, t, \lambda) v(t, y, \lambda) dt + h(x, y, \lambda)$$

mit

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^{-i} R^i(x, y) + \lambda^{-k-1} R'(x, y, \lambda),$$

(2, 4)

$$h(x, y, \lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^{-i} h^i(x, y) + \lambda^{-k-1} h'(x, y, \lambda).$$

Die früheren Voraussetzungen gehen über in die Voraussetzung A: (1) R^i und h^i sind von der Klasse C^{k+1-i} , $0 \leq i \leq k$, $k \geq 1$; (2) R' und h' stetig in T für jedes λ aus Z ; (3) $R_0(x, x) = (\gamma_i(x) \delta_{ij})$; (4) $\gamma_i(x) \neq \gamma_j(x)$ für x aus I , $1 \leq i, j \leq n$; (5) $\gamma_i(x) \neq 0$ für x aus I , $1 \leq i \leq n$. — Formale Entwicklung: Theorem 2, 6: Es gibt Funktionen $F^q(x, y)$ und $g^q(x, y)$ der Klasse C^{k+1-q} in T , derart, daß mit dem Ansatz

$$(2, 7) \quad v(x, y, \lambda) = \sum_{q=0}^{k-1} \lambda^{-q} F^q(x, y) e(x, y) + \sum_{q=1}^k \lambda^{-q} g^q(x, y) + \lambda^{-k} w(x, y, \lambda)$$

(2, 3) übergeht in

$$(2, 8) \quad \begin{aligned} w(x, y, \lambda) = & \lambda \int_y^x R(x, t, \lambda) w(t, y, \lambda) dt + b^0(x, y) + d(x, y, \lambda)/\lambda \\ & + \int_y^x D(x, t, y, \lambda) e(t, y) dt + m(x, y, \lambda); \end{aligned}$$

dabei ist $e(x, y)$ der Vektor, für den $e_i(x, y) = \exp(\lambda \int_y^x \gamma_i(s) ds)$ gilt: die rechts in (2, 8) auftretenden Größen werden durch die bekannten und die $F^q(x, y)$ und $g^q(x, y)$ ausgedrückt. Die $F^q(x, y)$ und $g^q(x, y)$ sind von k und λ unabhängig, ihre rechnerische Bestimmung wird angegeben. — Asymptotisches Verhalten: K' und f' in (2, 2), also auch R' und h' in (2, 4) seien in später anzugebenden Bereichen beschränkt. Z sei die Punktmenge λ , für die

$$(3, 1) \quad \Re(\lambda \gamma_1(x)) \geq \Re(\lambda \gamma_i(x)), \quad i = 2, \dots, n, x \text{ in } I.$$

Z_1 sei die Teilmenge mit $\Re(\lambda \gamma_1(x)) \leq 0$, Z_2 mit $\Re(\lambda \gamma_1(x)) \geq 0$ für alle x aus I . \mathfrak{Z}_i ($i = 1, 2$) seien die Punktmenge(n) (x, y, λ) mit x, y aus T , λ aus Z_i . Zu $F(x, y, \lambda)$ aus \mathfrak{Z}_2 bedeute $F(x, y, \lambda) = e_1(x, y)^{-1} F(x, y, \lambda)$. — Theorem 3, 9: In (2, 7) ist w/λ in \mathfrak{Z}_1 beschränkt, wenn dies für R' und h' zutrifft. Sind R' und h' in \mathfrak{Z}_2 beschränkt, so auch w/λ . — Es sei Z'_1 die Teilmenge von Z_1 , für die $|\pi - \arg \lambda \gamma_1(x)| \leq \pi/2 - \delta$, Z'_2 die Teilmenge von Z_2 , für die $|\arg \lambda \gamma_1(x)| \leq \pi/2 - \delta$ für alle x aus I und positives δ ist. \mathfrak{Z}'_i seien die Punktmenge(n) (x, y, λ) mit x, y aus T und λ aus Z'_i . Theorem 3, 16: Sind R' und h' in \mathfrak{Z}'_1 beschränkt, so ist

$$\begin{aligned} w(x, y, \lambda) = & [h_i^k(y, y) - g_i^k(y, y)] e_i(x, y) \\ & + \sum_{j \neq i} \frac{\Phi_{ij}(y, y) \gamma_j(y)}{\gamma_j(y) - \gamma_i(y)} [e_j(x, y) - e_i(x, y)] + w'_i(x, y, \lambda) \lambda \end{aligned}$$

mit in \mathfrak{R}'_1 beschränktem w' . Ist R' und \bar{h}' in \mathfrak{R}'_2 beschränkt, so auch \bar{w} . Dabei ist die i -te Komponente des in (2, 8) auftretenden Vektors $b^0(x, y) + d(x, y, \lambda)/\lambda$ gleich $\sum_{j \neq i} \Phi_{ij}(x, y) e_j(x, y)$. — Weitere Theoreme befassen sich mit Spezialfällen, in denen gewisse Terme in den asymptotischen Entwicklungen verschwinden. — Anwendungen: Auf die vorige Theorie führt auch das Anfangswertproblem der Integrodifferentialgleichung

$$\vartheta^{(n-1)}(x, \lambda) + \lambda \alpha_1(x, \lambda) \vartheta^{(n-2)}(x, \lambda) + \dots + \lambda^{n-1} \alpha_{n-1}(x, \lambda) \vartheta(x, \lambda) + \lambda^n \int_{\alpha}^x I(x, t, \lambda) \vartheta(t, \lambda) dt = \lambda^n \Phi(x, \lambda).$$

— Schließlich wird für $\mu \rightarrow \infty$ die Konvergenz der Lösungen der Integralgleichung

$$\vartheta(x) = \mu \int_{\alpha}^x I(x, t) \vartheta(t) dt + \mu \Phi(x)$$

nach Lösungen der Integralgleichung erster Art

$$\int_{\alpha}^x I(x, t) \vartheta(t) dt + \Phi(x) = 0$$

studiert.

Iglisch (Braunschweig).

Parodi, Maurice: Remarque sur l'équation intégrale de seconde espèce à noyau singulier de Weyl. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 153—155 (1948).

Die Integralgleichung

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_0^{\infty} \sin xt f(x) dx$$

besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2/\pi}$. Für $\lambda = \sqrt{2/\pi}$ (bzw. $\lambda = -\sqrt{2/\pi}$) ist diese Integralgleichung nur dann lösbar, wenn $g(t)$ die Form:

$$g(t) = A(t) - \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} \sin xt A(x) dx$$

hat, wobei $A(x)$ eine willkürliche Funktion ist. Dann sieht die Lösung so aus:

$$f(t) = \frac{1}{2} \left[g(t) + h(t) + \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} \sin xt h(x) dx \right]$$

mit der willkürlichen Funktion $h(x)$.

Thimm (Bonn).

Bellman, Richard: Some properties of summation kernels. Duke math. J. **15**, 1013—1019 (1948).

L'A. dimostra alcune proprietà dei nuclei della forma:

$$K(t, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \begin{Bmatrix} \cos n \Theta \\ \sin n \Theta \end{Bmatrix}, \quad \lambda_{n+1} > \lambda_n > 0,$$

quando: a) $\lambda_n = n$, b) $\lambda_n = n^q$ ($0 < q < 1$), c) $\lambda_n = \log n$ ($t > 0$) e d) $\lambda_n = n^2$. Nel caso: d) egli prova il seguente risultato: Se la funzione $f(x, y, z)$ è continua nel cubo: $0 \leq x, y, z \leq \pi$ ed ammette lo sviluppo:

$$f(x, z, y) \sim \sum_{l, m, n=1}^{\infty} a_{l, m, n} \sin lx \sin my \sin nz$$

vale la seguente disuguaglianza:

$$\max_{\substack{x, y, z \\ 0 \leq l < +\infty}} \left| \sum_{l, m, n=1}^{\infty} a_{l, m, n} e^{-(l^2 + m^2 + n^2)t} \sin lx \sin my \sin nz \right| \leq \max_{x, y, z} |f|$$

Questo teorema ha dei legami con il problema di determinare delle maggiorazioni per le soluzioni dell'equazione del calore: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_t = 0$.

Miranda (Napoli).

Parodi, Maurice: Nouvelles correspondances symboliques et leurs applications à la résolution d'équations intégrales. Rev. sci., Paris 86, 286—287 (1948).

Nota l'immagine nel senso di Laplace della funzione $f(t)$, l'A. determina quelle delle funzioni: $\exp. (-a^2 t^{2^n}) f(t)$, $\exp. (-a^2 t^{2^{1n}}) f(t)$ essendo n intero positivo. Questo risultato permette di risolvere alcune equazioni integrali di tipo particolare.

C. Miranda (Napoli).

Poli, L.: Le calcul symbolique à deux variables. Rev. sci., Paris 85, 616—617 (1947).

Verf. läßt an die Stelle der Laplacetransformation in der Gestalt

$$f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} h(t) dt$$

die zweidimensionale Verallgemeinerung treten:

$$f(p, q) = p q \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px - qy} h(x, y) dx dy.$$

Im Falle $h(x, y) = h(m)$, wo $m = \text{Min}(x, y)$, wird $f(p, q) = f(p + q)$. An diesem und einigen weiteren Beispielen zeigt sich, daß man zu einer noch so einfach ausgewählten Bildfunktion f keine einfache (z. B. stetig differenzierbare) Urbildfunktion h erwarten darf; es sind also für die Ausbildung des Kalküls, etwa bei der Rechtfertigung der Vertauschung von Grenzübergängen, ernste Schwierigkeiten zu gewärtigen. Demgegenüber weist Verf. auf seine Nützlichkeit zur analytischen Darstellung von Funktionen mit Unstetigkeiten hin und gibt die merkwürdige Formel (für hinreichend kleine positive x, y):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(x, y)}{n} = -C - \log \text{Max}(x, y).$$

Hier bedeutet C die Eulersche Konstante, und die Polynome $L_n(x, y)$ sind nach Humbert in Analogie zu den Kummerschen als Urbildfunktionen zu $\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^n$ erklärt.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Cârstoiu, Ion: Sur le calcul symbolique à deux variables et ses applications. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 45—47 (1948).

Zunächst wird die bekannte Mellinsche Umkehrformel auf die Laplacetransformation in zwei Veränderlichen übertragen:

$$\varphi(p, q) = p q \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px - qt} f(x, t) dx dt,$$

wobei $\varphi(p, q)$ als für $\Re(p) > \alpha > 0$, $\Re(q) > \beta > 0$ regulär, das dem Mellinschen analoge Doppelintegral für die Umkehrung als existierend vorausgesetzt wird. Mit diesen Mitteln wird dann die Wärmeleitungsgleichung $\partial u / \partial t = \nu \partial^2 u / \partial x^2$ ($x > 0, t > 0$) unter den Bedingungen $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = U(t)$ behandelt. Dabei zeigt sich, daß, weil $(\partial u / \partial x)_{x=0}$ nicht bekannt ist, die Rand- und Anfangsbedingungen allein zur vollständigen Übersetzung der Differentialgleichung in eine algebraische Relation nicht ausreichen. Ein funktionentheoretischer Kunstgriff [Beseitigung einer störenden Singularität im Unterbereich durch passende Wahl des Bilds von $(\partial u / \partial x)_{x=0}$] führt nach Rückkehr in den Oberbereich unter Anwendung des Faltungssatzes in der Tat zur klassischen Lösung

$\frac{x}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{\exp(-x^2/4\nu(t-\tau)) U(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}$. Wegen

der mangelnden Zwangsläufigkeit dieses Verfahrens erscheint es zu einer systematischen Behandlung schwierigerer Aufgaben zunächst wohl nicht ohne weiteres tauglich.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Cârstoiu, Ion: Applications nouvelles du calcul symbolique aux fonctions de Bessel. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 769—770 (1948).

Aus einigen bekannten Transformationsformeln Besselscher Funktionen werden durch Ansatz für zwei verschiedene Indizes und Faltung neue Formeln hergeleitet; und zwar handelt es sich um die Laplace-Transformierten von $J_\alpha(t)$, $t^\alpha J_\alpha(t)$, $i^{\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{at})$ [vgl. z. B. Doetsch, Tabellen zur Laplace-Transformation, Berlin, Göttingen 1947, Tafel C. 2. 30, 2. 102, 4. 74; dies. Zbl. **29**, 45]. Kombiniert man J_α mit I_α , so ergeben sich insbesondere im 3. Falle durch Übergang in den Oberbereich einige schon in dem Watsonschen Werk enthaltene Formeln vom Faltungstyp besonders einfach.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Doetsch, Gustav: Das Verhalten der Laplace-Transformierten in ihrer Beschränktheithalbebene. Comment. math. Helvetici **20**, 1—8 (1947).

Die Laplacetransformierte $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ (bzw. ihre analytische Fortsetzung über die Konvergenzabszisse hinaus) möge in einer Halbebene $\Re s = x \geq \sigma$ beschränkt sein; die untere Grenze μ dieser σ heißt dann „Beschränktheitsabszisse“, die Halbebene $x \geq \mu$ „Beschränktheithalbebene“. Es wird das Verhalten von $M(x) = \lim_{\Re s = x} |f(s)|$ für $x \rightarrow \infty$ untersucht. Im wesentlichen auf Grund der Konvexität von $\log M(x)$ („Dreigeradensatz“) ergibt sich zunächst die Existenz von $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \log M(x) = -v \leq 0$ (v „Beschränktheitsordnung“). Zur Berechnung von v genügt es, wie mittels des Phragmén-Lindelöfschen Prinzips gezeigt wird, reelle Werte von s zu betrachten; es wird nämlich $-v = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \log |f(x)|$. Schließlich wird gezeigt, daß v dann und nur dann einen positiven Wert besitzt, wenn $F(t)$ für $0 < t < v$ „Nullfunktion“ ist, d. h. $\int_0^t F(\tau) d\tau$ dort $\equiv 0$ wird. Hieraus ergibt sich, daß v auch als obere Grenze derjenigen Werte a charakterisiert werden kann, für die $F(t)$ in $0 < t < a$ Nullfunktion ist, falls es solche a gibt; andernfalls ist $v = 0$.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Hirschman jr., I. I. and D. V. Widder: Generalized inversion formulas for convolution transforms. Duke math. J. **15**, 659—696 (1948).

Bei reellen a_k mit $\sum a_k^{-2} < \infty$ und $b_\infty = \lim b_n$ sowie $0 \leq \lambda_{k,n} \leq 1$ mit $\lambda_{k,\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k,n} = 1$ sei

$$E_m(n, s) = e^{b_n s} \prod_{k=1}^m (1 - \lambda_{k,n} s/a_k) \exp(\lambda_{k,n} s/a_k).$$

Ist dann $G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{st} / E_{\infty_1}(s) ds$ und $\varphi(t)$ eine stetige Funktion so, daß $\varphi(t) = O(e^{\beta_1 t}) = O(e^{\beta_2 t})$ mit $\beta_1 > \alpha_1 = \text{Max}(a_k, -\infty)$ für $a_k < 0$ und $\beta_2 > \alpha_2 = \text{Min}(a_k, +\infty)$ für $a_k > 0$ ist, dann kann die Faltungstransformation $f(x) = \int_{-\infty}^\infty G(x-t) \varphi(t) dt$ mit Anwendung des Differentialoperators D durch $\lim_{n \rightarrow \infty} E_\infty(n, D) f(x) = \varphi(x)$ umgekehrt werden. Die Beschränkungen in bezug auf $\varphi(t)$ können fallen gelassen werden, wenn die unendliche Doppelfolge $\lambda_{k,n}$ so eingeschränkt wird, daß für alle n : $|\sigma + i\tau| E_\infty(n, \sigma + i\tau) / E_{\infty_1}(n, \sigma + i\tau)$ für $|\tau| \rightarrow \infty$ gegen Null strebt und dessen Integral über $-\infty < \tau < \infty$ für alle σ mit $E_{\infty_1}(\infty_1, \sigma) \neq 0$ konvergiert. Sind dann x_1 und x_2 Stetigkeitspunkte von $\varphi(t)$ und $f(x) = \int_{-\infty}^\infty G(x-t) e^{ct} d\varphi(t)$ mit positiven und negativen a_k in G , dann ist

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} e^{-cx} E_{\infty}(n, D) f(x) dx = q(x_2) - q(x_1)$. Hier sind x_2 und x_1 endlich bzw. $x_2 = \infty$ bzw. $x_1 = -\infty$, je nachdem $\alpha_1 \leq c < \alpha_2$ bzw. $c > \alpha_2$ bzw. $c < \alpha_1$ ist. Spezielle Wahl der $\lambda_{k,n}$ ergibt dann sowohl frühere Resultate der Verff., insbesondere bekannte Sätze über die Laplacesche und Stieltjessche Transformation, als auch komplexe Umkehrformeln solcher Art, wie sie Stieltjes bei seiner Transformation ursprünglich gefunden hat.

Szentmártony (Budapest).

Delange, H.: *Théorèmes taubériens relatifs à l'intégrale de Laplace*. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 1802—1804 (1947).

Die reelle oder komplexwertige Funktion $s(t)$ sei für $t > 0$ erklärt und in jedem endlichen Intervall L -summierbar; für ein reelles α , eine nach oben unbeschränkte Menge M von t -Werten und für $\lambda > 1$ sei

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in M}} \overline{\lim}_{\substack{t \leq t' < \lambda t}} |s(t') - s(t)| t^\alpha = w_\alpha(M, \lambda) < \infty.$$

Dann existiert $F(z) = z \int_0^\infty e^{-zt} s(t) dt$ für $z > 0$, und aus Annahmen über das Verhalten von $F(z)$ auf einer (nicht zu schnell) gegen Null strebenden Folge z_n lassen sich nun genauere Angaben über das asymptotische Verhalten von $s(t)$ ziehen. Gilt z. B. $F(z_n) = C z_n^{-\alpha} + o(z_n^{-\alpha})$ für ein $\alpha \geq 0$, so folgt $\left| \frac{s(t)}{t^\alpha} - \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \leq W_\alpha(M, 1+0)$; Entsprechendes gilt, wenn für ein α mit $-p-1 < \alpha < -p$ ($p \geq 0$) $F(z_n) = \sum_{v=0}^p C_v z_n^v + C z_n^{-\alpha} + o(z_n^{-\alpha})$ bei Ersetzung von $s(t)$ durch $s(t) - s(+\infty)$. Verschärfungen für reelles $s(t)$; keine Beweise. Hermann Schmidt (Braunschweig).

Souriau, J.: *Valeurs moyennes et transformations de Laplace*. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 25—26 (1947).

Nach Angabe einiger allgemeiner Eigenschaften der (Rieszschen) Integralmittel der Ordnung α ($\Re \alpha > 0$)

$$g_\alpha(x) = \alpha \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} g(xt) dt$$

werden sie angewendet auf die Limitierung von

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-ix}^{\lambda+ix} \frac{F(z)}{z} e^{uz} dz, \quad \text{wo} \quad F(z) = z \int_0^\infty e^{-zx} f(x) dx$$

die Laplacetransformierte einer in jedem endlichen Intervall $0 \leq x \leq X$ L -summierbaren, durch eine Exponentialfunktion $K e^{kx}$ majorisierten Funktion $f(x)$ bedeutet ($\lambda > k > 0$). Ist u eine Unstetigkeitsstelle 1. Art von f , so strebt das Mittel 1. Ordnung von $\varphi(x)$ gegen $(f(u+0) + f(u-0))/2$, ebenso $\varphi(x)$ selbst, wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ existiert (Mellinsche Umkehrformel). Ferner ergibt das Mittel 2. Ordnung von $(e^{uz} F(z) + e^{\bar{u}\bar{z}} F(\bar{z}))/2$, wo $z = \lambda + ix$, $\bar{z} = \lambda - ix$, für $x \rightarrow \infty$ den Sprung $f(u+0) - f(u-0)$, woraus man insbesondere für den Fall einer allgemeinen Dirichlet-Reihe einen Ausdruck für den n -ten Koeffizienten (und nicht nur wie üblich für die Summe der n ersten!) durch die Funktion gewinnt.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Batschelet, Eduard: *Die Operatorenmethode von L. Fantappiè und die Laplace-Transformation*. Comment. math. Helvetici **22**, 200—214 (1949).

L'A. confronta il metodo degli operatori di Fantappiè con quello della trasformazione di Laplace per l'integrazione delle equazioni differenziali lineari. —

A tal uopo prende in considerazione l'equazione differenziale di tipo iperbolico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x) u = f(x, y),$$

ove i coefficienti sono funzioni continue della variabile x , e suppone che i valori della funzione incognita $u(x, y)$ e delle sue derivate parziali $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$ siano assegnati lungo un'arco di curva che è incontro una sola volta al più sia da ogni parallela all'asse x sia da ogni parallela all'asse y . — Ricondotto tale problema alla nota forma di Riemann [Ges. Werke, 2. Aufl., p. 161], l'A. applica l'operatore di Fantappiè

$$If(y) = \int_{\eta}^y f(t) dt,$$

e riporta un procedimento già sviluppato da Fantappiè [Accad. Ital. Mem. Cl. Sci. fisic. mat. natur. **1**, 1—35 (1930)]. Dal confronto tra questo procedimento e quello della trasformazione di Laplace l'A. rileva quali vantaggi offre il metodo degli operatori di Fantappiè. — È da soggiungere che il presente lavoro è rivolto anche a quei lettori che non hanno familiarità con la teoria di Fantappiè, della cui terminologia l'A. non fa uso.

S. Cinquini (Pavia).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Verblunsky, S.: Additional note on two moment problems for bounded functions. Proc. Cambridge philos. Soc. **44**, 140—142 (1948).

„Diese Note schließt sich an eine vorangehende des Verf. an [Proc. Cambridge philos. Soc. **42**, 189—196 (1946)] und muß im Zusammenhang mit dieser gelesen werden.“ Sie enthält Beweisergänzungen und eine Berichtigung dazu.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Morse, Marston and William Transue: Functionals of bounded Fréchet variation. Canadian J. Math. **1**, 153—165 (1949).

Si tratta di un lavoro preliminare nel quale gli A. estendono, al caso di funzionali definiti in un rettangolo, alcuni teoremi già noti per i funzionali definiti in un intervallo.

S. Cinquini (Pavia).

Aczél, John: A remark on involutory functions. Amer. math. Monthly **55**, 638 (1948).

Eine Funktion $y = f(x)$ ist „involutorisch“, wenn zugleich $x = f(y)$ gilt. Leicht zeigt man: Die Menge aller involutorischen Funktionen ist identisch mit der Menge aller Lösungen $y = f(x)$ der Gleichung $\Phi(x, y) = 0$ oder identisch mit allen Lösungen von $g(x, y) \pm g(y, x) = 0$ oder mit allen Lösungen von $h(x) \pm h(y) = 0$; dabei durchläuft Φ alle symmetrischen bzw. antisymmetrischen Funktionen, g alle beliebigen Funktionen mit zwei und h alle beliebigen Funktionen mit einer Variablen.

Töpfer (Köln).

Kostelman, H.: On the functional equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Fundam. Math., Warszawa **34**, 144—147 (1947).

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist folgender Satz: Sei $f(x)$ eine reelle Lösung der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (1), welche auf einer Menge E vom positivem Maße beschränkt ist, so hat diese Lösung die Form $f(x) \equiv xf(1)$ (2). — Der Beweis ist elegant und einfach und beruht auf einem bekannten Satz von H. Steinhaus [Fundam. Math., Warszawa **1**, 93—104 (1920)]. Dieser lautet, wie folgt: Ist E eine beschränkte Menge vom positivem Maße, so existiert eine Zahl $\delta > 0$, so daß, wenn Θ beliebig und $|\Theta| < \delta$, für geeignete Elemente $x \in E$ und $y \in E$ gilt: $\Theta = x - y$ ist. Auch für diesen Steinhausschen Satz wird (bezüglich des Euklidischen Raums R_n) ein kurzer Beweis gegeben. — Ein analoger Satz für die additiven Operatoren der normierten Vektor-Räume wird bewiesen. — Zum Schluß bemerkt Verf., daß A. Ostrowski [Jber. Deutsche Math. Verein. **38**,

54—67 (1929)] den etwas stärkeren Satz bewies: Eine Lösung von (1), welche auf einer Menge von positivem Maße von oben beschränkt ist, hat die Form (2). Dieser stärkere Satz kann aber auch durch die vom Verf. angegebene Methode bewiesen werden.

St. Fenyö (Budapest).

Segal, I. E.: The group algebra of a locally compact group. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 69—105 (1947).

The author defines the group algebra A of a locally compact (l. c.) group G as the Banach algebra of the complex valued functions on G , integrable with respect to the left-invariant Haar measure dx , multiplication being defined as convolution. It is proved that if G is the direct product of a l. c. abelian group and a compact group, then A is „semi-simple“, i. e. the intersection of all regular maximal ideals in A is the null ideal. For a general l. c. group G , it is proved only that A is „weakly semi-simple“, i. e. the intersection of all regular maximal right ideals is the null ideal and the same for left ideals. [A right (left, two-sided) ideal I is called regular if there exists an element of A which is a left (right, two-sided) identity modulo I .] In the proof, use is made of the selfadjoint operator T_h in $L_2(G)$, defined by $T_h g = h h^* g$, h being a given element of A and h^* its adjoint [i. e. $h^*(x) = \varrho(x) h(x^{-1})$, $\varrho(x)$ being defined by $dx^{-1} = \varrho(x) dx$], and the fact that if the spectrum of a self-adjoint operator T contains the single point 0, then $T = 0$. — It is then shown that an ideal in a semi-simple algebra can be resolved into regular ideals in an appropriate fashion, the approximation being in terms of a topology which is algebraically introduced into the family of all regular maximal ideals. This topologized family, called the „spectrum“ of the algebra, is shown to be discrete for the group algebra of a compact group, and homeomorphic to the character group of an abelian group. — Among the numerous applications, we mention the proof of the fact that a l. c. group has a complete set of strongly continuous irreducible representations by bounded operators on Banach spaces. [Gelfand and Raikov have proved, by entirely different methods, that the same is true for unitary representations in Hilbert space, cf. Mat. Sbornik, II. s. **13**, 301—316 (1943); cf. also the author's paper in the Bull. Amer. math. Soc., **53**, 73—88 (1947); this Zbl. **31**, 360; and Godement, Trans. Amer. math. Soc. **63**, 1—84 (1948); this Zbl. **31**, 359]. A theorem of Tauberian type is obtained which generalizes in a considerable extent those of Wiener and Pitt. The basic case of a theorem of Beurling [9. Skand. Mat. Kongr., Helsingfors 1938, 345—366 (1939); dies. Zbl. **21**, 322] and Cameron and Wiener [Trans. Amer. math. Soc. **46**, 97—109 (1939); this Zbl. **21**, 322] about the existence of analytic functions of absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms, is extended from the real to arbitrary l. c. abelian groups, and partially extended to compact, non abelian groups.

Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Kaplansky, Irving: Primary ideals in group algebras. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 133—136 (1949).

Let G be a locally compact abelian (l. c. a.) group and A its L_1 group algebra [for definitions, see the preced. review]. A question arising from Wiener's Tauberian theorems is the following: is any closed ideal I in A the intersection of the regular maximal ideals containing it? L. Schwartz has recently given a counter-example [C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 424—426 (1948)]. Ditkin [Učenyje Zapiski Moskov. Gosud. Univ. **30**, 83—130 (1939)], Beurling [Acta Math., Uppsala **77**, 127—136 (1945)] and Segal (loc. cit.) have obtained an affirmative answer in the case: G is the group of the real numbers or the group of integers, I is a primary ideal (i. e., contained in exactly one regular maximal ideal). Using partly the methods of Segal, the author succeeds to extend now this result to an arbitrary l. c. a. group, by showing that any closed primary ideal of A is then maximal. This proves a hypothesis of Godement [Ann. sci. Ecole norm. sup., Paris **74**, 119—138 (1946)] and makes possible to extend Beurling's results (loc.

cit.) to any l. c. a. group, and also to prove that the only irreducible representation of a l. c. a. group by operators in a Banach space is one-dimensional. More generally, it is proved that if G is the direct sum of a compact group and a l. c. a. group, then any such representation is finite-dimensional.

Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Mikusiński, Jan G.: *L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle. I.* Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Lublin, Sect. A 2, 1—47 u. poln. Zusammenfassg. 48 (1947).

Unter einem „anneau algébrique“ (algebraischer Ring) wird ein System von Elementen verstanden, in dem zwei Operationen, die Addition und Multiplikation, definiert sind, derart, daß gilt: I. $(a + b) + c = a + (b + c)$; II. Es existiert mindestens eine Lösung der Gleichung $a + x = b$; III. $(ab)c = a(bc)$; IV. $a(b + c) = ab + ac$; V. $(b + c)a = ba + ca$. Aus I. und II. leitet man das kommutative und assoziative Gesetz der Addition, die eindeutige Existenz des Null-elements sowie die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $a + x = b$ ab. Beispiel: $a(t), b(t)$ komplex und summabel in $0 \leq t < T$. Wenn $a + b = \{a(t) + b(t)\}$, $ab = \left\{ \int_0^t a(t - \tau) b(\tau) d\tau \right\}$ gesetzt wird, so sind die 5 Bedingungen erfüllt. Übrigens gilt hier $ab = ba$. Es gilt ferner allgemein $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. Für ein „Einselement“ 1 soll gelten $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ für alle a des Systems. Es braucht kein solches zu geben; wenn es existiert, so ist es eindeutig und von Null verschieden, falls überhaupt zwei verschiedene Elemente im System vorhanden sind. Zwei Elemente a und b heißen invers, wenn $ab = ba = 1$ ist. Wenn a ein inverses Element besitzt, so ist es eindeutig. — Wenn ein anneau algébrique kein Einheitsselement besitzt, so kann man ihm ein anderes System zuordnen, das ein solches enthält. Dies geschieht durch Bildung des „anneau komplex“, dessen Elemente die Paare (α, a) sind, wo α die komplexen Zahlen und a die Elemente des gegebenen Systems durchläuft. Dabei soll $(\alpha, a) = (\beta, b)$ sein, wenn $\alpha = \beta, a = b$ ist, $(\alpha, a) + (\beta, b) = (\alpha + \beta, a + b)$, ferner $(\alpha, a) \cdot (\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha b + \beta a + ab)$; hier ist jetzt $(1, 0)$ das Einselement. Zweckmäßig schreibt man $(\alpha, a) = \alpha + a, \alpha = (\alpha, 0), a = (0, a)$. Dieser Begriff des anneau komplex wird noch allgemeiner definiert, ohne daß dies hier wiedergegeben werden kann. — Anwendungen dieser Begriffe auf Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ergeben in sehr eleganter Form die Legalisierung des Heaviside-Kalküls, und zwar ganz allgemein, ohne die Konvergenzeinschränkungen, denen die Methode der Laplace-Transformation unterworfen ist. Ein weiteres Anwendungsgebiet betrifft die Fredholmschen und Volterraschen Integralgleichungen.

Schmeidler (Berlin).

Weyl, Hermann: *Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space.* Amer. J. Math. 71, 178—205 (1949).

Man geht aus von einer Gruppe \mathcal{G} und einem möglicherweise überabzählbar-dimensionalen Vektorraum Σ , welcher bezüglich \mathcal{G} ein „Darstellungsmodul“ ist. Eine besondere Rolle spielen die endlich-dimensionalen, gegenüber \mathcal{G} invarianten Teilmoduln Γ von Σ , welche Darstellungsmoduln im üblichen Sinne sind. Es wird Σ als metrischer Raum angenommen, d. h. es soll für je zwei Elemente $f, g \in \Sigma$ ein Skalarprodukt (f, g) erklärt sein, welches die üblichen Eigenschaften besitzt. Außerdem soll es gegenüber den Transformationen aus \mathcal{G} invariant sein. Schließlich soll in Σ jedem $f \in \Sigma$ eine Länge $|f|$ zugeordnet sein, welche abermals die üblichen Eigenschaften hat, z. B. auch invariant ist. Skalarprodukt und Länge stehen in dem Verhältnis $(f, f) \leq |f|^2$ zueinander. Ein Vektor $f \in \Sigma$ heißt fastperiodisch, wenn xf (also das Bild von f bei Anwendung von $x \in \mathcal{G}$), aufgefaßt als Funktion von x mit Werten in Σ , eine fastperiodische Funktion ist (fastperiodisch in bekannter

Weise unter Benutzung der Länge $|f|$ erklärt).— Als Beispiel betrachtet man den Raum Σ aller komplexwertigen stetigen Funktionen der Punkte der Kugeloberfläche, welcher durch die Gruppe \mathcal{G} der Kugeldrehungen in sich transformiert wird. Die Teilräume Γ der Kugelflächenfunktionen n -ter Ordnung sind Darstellungsmoduln von \mathcal{G} . Der Raum Σ enthält nur fastperiodische Vektoren, da wir die Funktionen stetig voraussetzen. (Skalarprodukt wie üblich definieren, $|f|$ wird = ob. Gr. $|f(P)|$ gesetzt!). — Verf. beweist, daß zu vorgegebenem fastperiodischem Vektor f eine abzählbare Folge endlicher invarianter Teilmoduln Γ_n des Moduls aller fastperiodischen Vektoren existiert mit folgenden Eigenschaften: Verschiedene Γ_n stehen senkrecht aufeinander. Man kann also in jedem Γ_n eine orthogonalnormierte Basis $g_1^{(n)}, \dots, g_s^{(n)}$ wählen und erhält in der Menge aller dieser Vektoren ($n = 1, 2, \dots$) ein abzählbares orthogonal normiertes Vektorsystem g_1, g_2, \dots . Setzt man $\alpha_r = (g_r, f)$, so gilt die Parsevalsche Gleichung $(f, f) = \Sigma |\alpha_r|^2$. Diese Tatsache ist damit gleichbedeutend, daß die Fourierreihe $\Sigma \alpha_r g_r$ von f „im Mittel“ gegen f konvergiert. — Weil man die Vektoren fastperiodisch voraussetzt, kann man für jeden solchen Vektor h und jede numerische fastperiodische Funktion $\xi(x)$ den Integralmittelwert $\xi \times h = M_x \{ \xi(x) \cdot xh \}$ bilden. Setzt man als Axiom voraus, daß $|\xi \times h|^2 \leq (\xi, \xi)(h, h)$ ist, so läßt sich auch im Sinne der Länge ein Approximationssatz beweisen: f kann durch endliche Summen der Gestalt $\Sigma \alpha_r' g_r$ beliebig genau approximiert werden. — Die vom Verf. benutzte Beweismethode ist das bekannte von ihm schon in anderen Abhandlungen verwandte Verfahren [Peter und Verf., Math. Ann., Berlin **97**, 737—755 (1927)]. In vorliegender Abhandlung bemüht sich der Verf., den Anwendungsbereich möglichst auszudehnen. — In einem Anhang wird der Beweis von Ref. [Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 240—244 (1935); dies. Zbl. **13**, 111] für die Existenz des Integralmittelwertes dargestellt. Verf. interpretiert einen dort vorkommenden kombinatorischen Hilfssatz in anschaulicher Weise als Lösung eines „Heiratsproblems“, wodurch auch der an sich zwar einfache, aber doch verwickelte Beweis dieses Hilfssatzes klarer wird.

Maak (Hamburg).

Oxtoby, John C.: On the ergodic theorem of Hurewicz. Ann. Math., Princeton, II. s. **49**, 872—884 (1948).

The ergodic theorem without invariant measure, due to Hurewicz [Ann. Math., Princeton, II. s. **45**, 192—206 (1944)] is generalized in two respects. First the hypothesis that the given set function $F(X)$ ($X \in \mathfrak{X}$) be absolutely continuous with respect to the measure $\mu(X)$, can be omitted provided that one defines the derivative $\varphi_n(x)$ of $F_n(X) = \sum_{i=0}^n F(T^i X)$ with respect to $\mu_n(X) = \sum_{i=0}^n \mu(T^i X)$ as the integrand of the Radon-Stieltjes integral corresponding to the absolutely continuous component of $F_n(X)$ with respect to $\mu_n(X)$; T denotes here a given measurable transformation of \mathfrak{X} . Second, it is proved that $\varphi_n(X)$ converges almost everywhere to a finite limit $\varphi(x)$, except on a set N such that $\mu(T^i N) = 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). However, in the absence of any restriction as for example that \mathfrak{X} be free from wandering sets, the limit function $\varphi(x)$ does not have in general the property of an invariant average.— The ergodic theorem of P. R. Halmos [Proc. nat. Acad. Sci. USA **32**, 156—161 (1946)] admits of analogous generalizations; moreover, it is shown that Hurewicz's and Halmos's ergodic theorems are equivalent in the sense that each can be derived from the other. Béla Sz.-Nagy.

Karlin, S.: Bases in Banach spaces. Duke math. J. **15**, 971—985 (1948).

The author calls a sequence of points x_n of a (separable) Banach space E a basis (or an absolute basis) if any element $x \in E$ admits of a unique representation $x = \Sigma a_n x_n$, the series being convergent (or unconditionally convergent). Introducing also other definitions of this kind, he discusses consequences on the structure of the space E or its conjugate E^* which result from the existence of a basis with

given properties. Bases in some special spaces are studied as well as the problem of the existence of projections. As examples we quote the following results: (1) If E possesses a basis x_n such that $\sum \|a_n x_n\|$ converges for any $x \in E$, then E is isomorphic into l_1 . (2) If E has an absolute basis and E^* is separable, then E^* is weakly complete. (3) If E has an absolute basis and E^{**} is separable, then E is reflexive.

G. G. Lorentz (Toronto).

Schatten, Robert and John von Neumann: The cross-space of linear transformations. III. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 557—582 (1948).

Soient \mathfrak{B}_1 et \mathfrak{B}_2 deux espaces de Banach, \mathfrak{B}_1^* et \mathfrak{B}_2^* leurs duals. Le produit tensoriel $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2$ peut être identifié à l'espace des applications linéaires faiblement continues et de rang fini de \mathfrak{B}_1^* dans \mathfrak{B}_2 , l'élément $\sum_i f_i \otimes g_i$ étant identifié à l'appli-

cation linéaire $x' \rightarrow \sum_i x'(g_i) f_i$. Les auteurs continuent leur étude des normes α

sur $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2$ telles que $\alpha(f \otimes g) = \|f\| \cdot \|g\|$ („crossnorms“ [cf. Ann. Math., Princeton, II. s. 47, 608—630 (1946)]). Le dual d'un tel espace $\mathfrak{B}_1 \otimes_\alpha \mathfrak{B}_2$ peut être identifié à l'ensemble des applications linéaires continues A de \mathfrak{B}_1 dans \mathfrak{B}_2^* telles que $\|A\|_\alpha = \sup_i |\sum_j A(f_j) g_j| / \alpha(\sum_j f_j \otimes g_j)$ soit finie, et $\|A\|_\alpha$ est une norme sur

cet espace $(\mathfrak{B}_1 \otimes_\alpha \mathfrak{B}_2)^*$; $\mathfrak{B}_1^* \otimes \mathfrak{B}_2^*$ peut être canoniquement identifié au sous-espace de $(\mathfrak{B}_1 \otimes_\alpha \mathfrak{B}_2)^*$ formé des transformations de rang fini; la norme induite sur $\mathfrak{B}_1^* \otimes \mathfrak{B}_2^*$ par celle de $(\mathfrak{B}_1 \otimes_\alpha \mathfrak{B}_2)^*$ est alors désignée par α' . Dans ce travail, les auteurs considèrent seulement le cas où \mathfrak{B}_1 et \mathfrak{B}_2 sont réflexifs. Ils disent qu'une norme α sur $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2$ est uniforme si on a $\alpha(\sum_i S f_i \otimes T g_i) \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \alpha(\sum_i f_i \otimes g_i)$ pour tout couple d'endomorphismes S, T de \mathfrak{B}_1 et \mathfrak{B}_2 respectivement

(avec $\|S\| = \sup \|Sx\| / \|x\|$). Ils montrent que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que pour toute $A \in (\mathfrak{B}_1 \otimes_\alpha \mathfrak{B}_2)^*$, et tout couple d'endomorphismes X, Y de \mathfrak{B}_1 et \mathfrak{B}_2^* respectivement, on ait $YAX \in (\mathfrak{B}_1 \otimes_\alpha \mathfrak{B}_2)^*$ et $\|YAX\|_\alpha \leq \|Y\| \cdot \|A\|_\alpha \cdot \|X\|$. Ils étudient ensuite plus particulièrement le cas où $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{H}$ est un espace de Hilbert, déterminent dans ce cas toutes les normes α uniformes, et montrent que pour une telle norme $(\alpha')' = \alpha$. Ils caractérisent enfin l'espace $(\mathfrak{H} \otimes_\alpha \mathfrak{H})^*$ lorsque α est une norme uniforme telle que $(\mathfrak{H} \otimes_\alpha \mathfrak{H})^*$ ne comprenne que des transformations complètement continues de \mathfrak{H} dans lui-même. Dieudonné.

Arens, R. F. and J. L. Kelley: Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space. Trans. Amer. math. Soc. 62, 499—508 (1947).

For a compact Hausdorff space X , let C_X be the Banach space of all real valued, continuous functions over X . The authors give two sets of necessary and sufficient conditions in order that a Banach space B should be equivalent to some space C_X . The first set refers to the properties of the unit sphere S of the conjugate space B^* : (1) All extreme points of S are contained in two supporting hyperplanes of S ; (2) Any weakly closed set of extreme points of S containing no antipodal points lies entirely in a supporting hyperplane. (A point $x \in S$ is an extreme point of S if x is not interior point of any segment contained in S .) The other set of conditions involves properties of maximal convex subsets of S .

G. G. Lorentz (Toronto).

Lonseth, A. T.: The propagation of error in linear problems. Trans. Amer. math. Soc. 62, 193—212 (1947).

Für die Gleichung $Tx = y$, worin x und y Elemente eines Banachschen Raumes sind und T eine lineare Transformation ist, wird studiert, wie sich die Änderung von y in $y + \eta$ und von T in $T + \tau$ auf x fortpflanzt. Ist $M(T)$ die obere Grenze der (beschränkten) Transformation T , für die T^{-1} existiert und ebenfalls beschränkt ist, so gilt im Falle $M(T^{-1}\tau) < 1$ für $(T + \tau)(x + \xi) = y + \eta$ die Abschätzung $\|\xi\| \leq \{M(T^{-1}) \|\eta\| + M(T^{-1}\tau) \|x\|\} / \{1 - M(T^{-1}\tau)\}$. Von diesem

(leicht zu beweisenden) Satze werden Anwendungen gemacht auf den Fall des n -dimensionalen Vektorraumes, auf den Hilbertschen Raum, auf das Schmidtsche Problem der unendlichen Gleichungen, auf die Abschnittsgleichungen eines unendlichen Systems und auf die Fredholmschen Integralgleichungen zweiter und erster Art.

Schmeidler (Berlin).

Ditkin, V. A.: Einige Formeln für nicht kommutative Operatoren. Uspechi mat. Nauk 3, Nr. 2 (24), 234—237 (1948) [Russisch].

R sei ein Ring (mit den reellen Zahlen als Operatoren), erzeugt durch zwei nichtkommutative Elemente p und q ; in R sei ferner eine Konvergenz erklärt. Ein in R definierter linearer Operator A wird ein Differentialoperator heißen, wenn für alle in seinem Definitionsbereich liegenden Elemente φ, ψ gilt: $A\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot A\psi = A(\varphi\psi)$. Ist $\varphi(p)$ ein Polynom von p , so wird u. a. gezeigt, daß

$$A\varphi(p) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{s_{k-1}}{k!} \varphi^{(k)}(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(p) \frac{s_{k-1}}{k!},$$

wo $s_0 = Ap$, $s_k = A_p^k s_0$ und $A_q \psi = p\psi - q\psi$. Ist insbesondere $A = A_p$ und existiert $[\varphi(p)]^{-1}$, so erhält man hieraus für irgendein Polynom $\psi(q)$:

$$\varphi(p) \psi(q) = \psi \left(q + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{s_{k-1}}{k!} \varphi^{(k)}(p) \right) \varphi(p),$$

wo $s_0 = pq - qp$, $s_k = A_q^k s_0$. — Im speziellen Falle, daß $A_p s_0 = 0$ und $s_1 = A_q s_0 = c = \text{konst.}$, ergibt sich hieraus die Formel:

$$A_p^n \varphi(p) = \left(s_0 \frac{d}{dp} - \frac{c}{2} \frac{d^2}{dp^2} \right)^n \varphi(p).$$

Da in diesem Falle

$$e^{A_p} p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_p^n \right) p = p + s_0,$$

so erhält man

$$\varphi(p + s_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(s_0 \frac{d}{dp} - \frac{c}{2} \frac{d^2}{dp^2} \right)^n \varphi(p).$$

— Als zweiter Spezialfall wird der Fall betrachtet, daß $s_0 = pq - qp$ mit p vertauschbar ist, d. h. $s_k = 0$ für $k = 1, 2, \dots$. Man erhält Formeln, die gewisse Resultate von McCoy [Proc. Edinburgh math. Soc. 3, 118—127 (1932); dies. Zbl. 5, 132; Trans. Amer. math. Soc. 31, 801 (1929)] und vom Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 56, 779 (1940)] verallgemeinern. Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Cramér, Harald: Problems in probability theory. Ann. math. Statist., Ann Arbor 18, 165—193 (1947).

Verf. schrieb diesen Artikel für die Konferenz „Probleme der Mathematik“ anlässlich der Zweihundertjahrfeier von Princeton, 1946. Er befaßt sich nur mit der rein mathematischen (und nicht mit der erkenntnistheoretischen oder statistischen) Seite des Gegenstandes und gibt eine Übersicht über die Grenzen, bis zu denen, soweit es ihm bekannt war, die Problemkreise und deren Lösungen vorgedrungen waren. Da seither bereits weitere Kenntnisse, z. T. vom Verf. selbst, gewonnen wurden, wird es hier genügen, eine Übersicht über die von ihm behandelten Fragenkomplexe zu geben. — Die Arbeit besteht aus drei Teilen: Grundbegriffe, Addition von unabhängigen Zufallsvariablen und stochastische Prozesse. Im ersten Teil werden Zufallsvariable, Zufallsreihen und Zufallsfunktionen, sowie verschiedene Formen der Wahrscheinlichkeitskonvergenz behandelt. Im zweiten Teil findet man Familien von Verteilungsfunktionen, das Gesetz der großen Zahlen, des iterierten Logarithmus und verwandte Gesetze und auch die Konvergenz von Zufallsreihen. Im letzten Teil wird der Funktionenraum und insbesondere der Hilbert-Raum eingeführt, die Ergodentheorie besprochen und spezielle Prozesse behandelt. Eine Bibliographie mit 84 Titeln beschließt den Artikel, der auch heute noch von aktuellem Wert ist.

S. Vajda (Epsom/England).

Doob, J. L.: Probability in function space. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 15–30 (1947).

Zweck des auf frühere Arbeiten des Verf. sowie Ambroses und Kakutanis sich stützenden Vortrags war, einige Hindernisse zu beseitigen, welche einer Anwendung der Maßtheorie in Funktionenräumen auf die Theorie der zufälligen Funktionen bzw. Prozesse im Wege stehen. Hierbei wurden auch einige noch der Lösung harrende Probleme diskutiert. Verf. gibt selbst zu, daß „die Theorie — trotz ihrer mathematischen Strenge — noch nicht als völlig zufriedenstellend betrachtet werden kann. Selbst Mathematiker, die aus Strenge allein leben können, werden sich an ihr nicht ohne weiteres erfreuen“.

Szentmártony (Budapest).

Birnbaum, Z. W., J. Raymond and H. S. Zuckerman: A generalization of Tshebyshev's inequality to two dimensions. Ann. math. Statist., Ann Arbor **18**, 70–79 (1947).

Verf. beweisen den folgenden Satz: Es seien W, Z unabhängige Zufallsvariable, für die die Wahrscheinlichkeiten $P(W < 0) = P(Z < 0) = 0$ (a) und die Erwartungswerte $E(W) = \lambda, E(Z) = \mu$ (b), wobei $\lambda \leq \mu$ gilt. Dann gilt für $t > 0$ die Ungleichung $P(W + Z \geq t) \leq M(t)$ (c), und es ist

$$M(t) = 1, \text{ wenn } t \leq \lambda + \mu;$$

$$= \mu/(t - \lambda), \text{ wenn } \lambda + \mu \leq t \leq t(\lambda + 2\mu + \sqrt{\lambda^2 + 4\mu^2});$$

$$= (\lambda + \mu)/t - \lambda\mu/t^2, \text{ wenn } \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu + \sqrt{\lambda^2 + 4\mu^2}) \leq t.$$

Für jedes gegebene $\lambda > 0, \mu > 0, \lambda \leq \mu$ und $t > 0$ gibt es unabhängige Zufallsveränderliche W, Z derart, daß (a) und (b) erfüllt sind und in (c) das Gleichheitszeichen gilt. — Wenn man $W = (X - X_0)^2/s^2, Z = (Y - Y_0)^2/t^2$ und $t = 1$ setzt, erhält man die im Titel erwähnte Verallgemeinerung des Tschebyscheffschen Satzes. — Die weitere Verallgemeinerung, die mit denselben Methoden zu einer Aussage über die oberen Schranken der Wahrscheinlichkeit dafür führen würde, daß ein Punkt (x_1, \dots, x_n) nicht in das Innere

von $\sum_{j=1}^n (X_j - e_j)^2/t_j^2 = 1$ fällt (e_j ist der Erwartungswert von X_j), wird von Verff. als zu langwierig und daher undurchführbar bezeichnet. Sie erhalten dagegen einen Satz, der sich auf n Veränderliche bezieht, indem sie W durch $\sum_{j=1}^m W_j$ und Z

durch $\sum_{j=m+1}^n W_j$ ersetzen.

S. Vajda (Epsom/England).

Gurland, John: Inversion formulae for the distribution of ratios. Ann. math. Statist., Ann Arbor **19**, 228–237 (1948).

In Verallgemeinerung einiger von Cramér, Curtiss und Geary erzielten speziellen Ergebnissen in bezug auf die Verteilung der Quotienten von Zufallsveränderlichen wird gezeigt, daß aus der charakteristischen Funktion $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ der Verbindungsverteilung der Zufallsveränderlichen X_1, \dots, X_n die Verteilungsfunktion $G(x)$ von $(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)/(b_1 X_1 + \dots + b_n X_n)$ bei

$$\text{Prb} \left\{ \sum_{j=1}^n b_j x_j \leq 0 \right\} = 0$$

sich durch

$$G(x) + G(x - 0) = 1 - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \{t(a_1 - b_1 x_1), \dots, t(a_n - b_n x_n)\} \frac{dt}{t}$$

mit dem Cauchyschen Hauptwert ergibt. Ist nur $\text{Prb} \left\{ \sum_{j=1}^n b_j x_j = 0 \right\} = 0$, so tritt an Stelle von φ die Summe der für $\sum b_j x_j >$ bzw. < 0 sich ergebenden charakteristischen Funktionen φ^+, φ^- . Die Ergebnisse werden sowohl auf die Verteilung mehrerer solcher Quotienten als auch auf jene mehrerer Quotienten von quadratischen Formen in den Koordinaten X_1, \dots, X_n einer n -dimensionalen Normalverteilung verallgemeinert.

Szentmártony (Budapest).

Kac, M.: On distributions of certain Wiener functionals. Trans. Amer. math. Soc. **65**, 1—13 (1949).

Zur Berechnung der Verteilungsfunktion $\sigma(\alpha; t) = \text{Prb} \left\{ \int_0^t V(x(\tau)) d\tau < \alpha \right\}$ von $\int_0^t V(x(\tau)) d\tau$, wo $x(t)$ mit $x(0) = 0$ für $0 \leq t$ ein Element des Wiener'schen Raumes und $V(x)$ eine für $-\infty < x < \infty$ stückweise stetige, nichtnegative Funktion bezeichnet, wird gezeigt, daß $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u\alpha - st} d_\alpha \sigma(\alpha; t) dt = \int_{-\infty}^\infty \psi(x) dx$ ist. Hierbei ist $\psi(x)$ die durch die Bedingungen $\psi(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$, $|\psi'(x)| < M$ für $x \neq 0$ und $\psi'(+0) - \psi'(-0) = -2$ eindeutig bestimmte Greensche Funktion von $\psi''(x) - 2(s + u V(x)) \psi(x) = 0$ für $x \neq 0$. Das Interesse an der Berechnung solcher Verteilungsfunktionen erklärt der Umstand, daß bei geeigneten unabhängigen Zufallsveränderlichen X_1, X_2, \dots , mit gemeinsamer Verteilungsfunktion und dem Mittelwert Null sowie der Streuung Eins, die Verteilungsfunktion von $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{\sqrt{n}}\right)$ unter entsprechenden Beschränkungen in bezug auf V gegen $\sigma(\alpha; t)$ strebt. Die Methode wird an den vom Verf. und Erdős — auf anderem Wege — behandelten Fällen $V(x) = x^2$ bzw. $(1 + \text{sgn } x)/2$ illustriert. *Szentmártony* (Budapest).

Erdős, P. and M. Kac: On the number of positive sums of independent random variables. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 1011—1020 (1947).

Verff. beweisen folgenden Satz von P. Lévy [Compositio math., Groningen **7**, 283—339 (1939); dies. Zbl. **22**, 59]: Es seien X_1, X_2, \dots voneinander unabhängige zufällige Veränderliche, deren Mittelwert gleich 0 und deren Streuung gleich 1 ist und von denen wir voraussetzen, daß auf sie der Hauptsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt werden kann. Es sei ferner $s_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, und es sei N_n die Anzahl der positiven unter den Zahlen s_1, s_2, \dots, s_n . Dann gilt im Wahrsch. $\{N_n/n < \alpha\} = (2/\pi) \arcsin \alpha^{1/2}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Der Beweis geschieht nach einer von den Verff. stammenden und für den Beweis gewisser Grenzwerte der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendbaren Methode [Bull. Amer. math. Soc. **52**, 292—302 (1946)] in zwei Schritten. Es wird zuerst bewiesen: Wenn es eine solche Reihe von unabhängigen zufälligen Veränderlichen gibt, die den Voraussetzungen des Satzes genügen, daß der Satz gilt, dann ist der Satz auch für jede Reihe gültig, welche die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. In dem zweiten Schritt wird die Gültigkeit

des Satzes für den Fall von der Voraussetzung Warsch. $\{Y_j < u\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^u e^{-|y|} dy$, $j = 1, 2, \dots$, genügenden, voneinander unabhängigen zufälligen Veränderlichen Y_1, Y_2, \dots bewiesen. *Gyires* (Debrecen).

Marseguerra, Vincenzo: Un'applicazione del calcolo delle probabilità. Archimede, Firenze **1**, 59—61 (1949).

Verf. löst die folgende Aufgabe: Aus einer Urne, die von 1 bis 90 nummerierte Kugeln enthält, werden drei Kugeln zufällig gezogen; die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, daß die Summe der gezogenen Nummern kleiner als 90 ist. — Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $p = 17969/117480 \approx 0,153$. *G. Pompilj*.

Statistik:

Godwin, H. J.: A further note on the mean deviation. Biometrika, Cambridge **35**, 304—309 (1948).

Für die Verteilungsfunktion von

$$m = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \bar{x}|}{n},$$

worin die x_i normal verteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Streuung 1 sind, ergibt sich ein Ausdruck, der in einer früheren Arbeit des Verf. im Jahre 1945 abgeleitet wurde. Das s -te Moment der Verteilung hat die Form

$$\sqrt{n(2\pi)^{-(n-1)/2}} \left(\frac{2}{n}\right)^s I(n, 0, s),$$

wobei $I(n, r, s)$ ein Integral ist, für das eine Rekursionsformel aufgestellt wird. Von $I(n, 0, 0) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-\frac{1}{2}}$ ausgehend, lassen sich so alle Momente schrittweise berechnen. Einige der sich ergebenden Formeln waren schon früher bekannt; als neue Formel wird explizit

$$\mu_5 = \frac{0,792\,218}{n^3} + \frac{0,023\,893}{n^4} + \frac{0,097\,967}{n^5} + \frac{0,133\,384}{n^6} + \dots$$

angegeben. — Zum Schlusse werden mehrere Näherungsformeln besprochen. Hierbei wird auch von einer Methode Gebrauch gemacht, die auf J. B. S. Haldane zurückgeht und von J. Neyman [dies. Zbl. 18, 257] besprochen worden ist.

S. Vajda (Epsom/England).

Haldane, J. B. S.: Note on the median of a multivariate distribution. *Biometrika*, Cambridge 35, 414—415 (1948).

Es wird der Begriff des Zentral-(Median-)wertes auf mehrdimensionale Verteilungen ausgedehnt. Hierzu bestehen zwei verschiedene Möglichkeiten je nachdem, welche der beiden im eindimensionalen Fall geltenden Eigenschaften man zur Definition benutzt: Halbierung des nach Größe geordneten Wertevorrates oder Minimalisierung des Erwartungswertes der absoluten Abweichungen vom Zentralwert.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Welker, E. L.: The distribution of the mean. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 13, 111—117 (1947).

Verf. stellt die Ausgangsverteilung und die Verteilung des Mittelwertes einer daraus hervorgegangenen Zufallsstichprobe vom Umfang N durch Pearsonkurven exakt bzw. näherungsweise dar und gibt zur Ermittlung des Pearsontyps der Mittelwertverteilung ein $\bar{\alpha}_3^2, \bar{\delta}$ -Diagramm an, das sich durch eine eindeutige Transformation aus dem zur Bestimmung des Typs der Ausgangsverteilung benutzten α_3^2, δ -Diagramm von C. Craig [Ann. Math. Statist., Ann Arbor 7, 16—28 (1936); dies. Zbl. 13, 359] erhalten läßt. Dabei ist α_k das k -te Moment der Ausgangsverteilung mit dem Mittelwert Null der Streuung 1, $\bar{\alpha}_k$ das k -te Moment der Mittelwertverteilung und

$$\delta = \frac{2\alpha_4 + 3\alpha_3^2 - 6}{\alpha_4 + 3} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\delta} = \frac{2\bar{\alpha}_4 + 3\bar{\alpha}_3^2 - 6}{\bar{\alpha}_4 + 3},$$

so daß zwischen α_3^2 und $\bar{\alpha}_3^2$ bzw. δ und $\bar{\delta}$ die Transformationsgleichungen

$$\bar{\alpha}_3^2 = \alpha_3^2 N^{-1}; \quad \bar{\delta} = \frac{\delta(\alpha_3^2 + 4)}{\alpha_3^2 + 4 + 2(N-1)(2-\delta)}$$

gelten. An Hand von Beispielen werden die Eigenschaften des transformierten Diagramms, insbesondere die Art seiner Konvergenz gegen den die Normalverteilung darstellenden Punkt (0, 0), erläutert.

Georg Friede (Göttingen).

Gumbel, E. J.: The distribution of the range. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 18, 384—412 (1947).

Diese Arbeit ist ein weiterer Beitrag zum Thema, mit dem sich Verf. seit vielen Jahren befaßt hat. Als neues Resultat wird mitgeteilt, daß für eine symmetrische Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ von „exponentiellem Typus“, d. h. wenn

$$\lim_{x=-\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=-\infty} \frac{q(x)}{\Phi(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)},$$

$$\text{worin} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx,$$

die asymptotische Verteilung der Verteilungsbreite (range), wie folgt, geschrieben werden kann:

$$g(w) = \alpha^2 e^{-\alpha(w-2u)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-e^{\alpha(x+u)} - e^{-\alpha(x+w-u)}] dx.$$

Hierin ist u definiert als die Lösung von $\Phi(u) = 1 - 1/n$ und $\alpha = \varphi(u)/(1 - \Phi(u))$. — Um die Parameter α und u zu eliminieren, wird die „reduzierte Verteilungsbreite“ $R = \alpha(w - 2u)$ eingeführt. Ihre Verteilungsfunktion ergibt sich als

$$\psi(R) = e^{-R} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-e^y - e^{-y-R}] dy.$$

Das letztere Integral läßt sich auf Hankelfunktionen zurückführen. — Die Arbeit enthält eine große Anzahl von Tabellen, graphischen Darstellungen und Beispielen, und Verf. zitiert eine Reihe von Resultaten, die in etwa 20 früheren Arbeiten enthalten waren.

S. Vajda (Epsom/England).

Maceda, E. Casado: On the compound and generalized Poisson distributions. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 414—416 (1948).

Je nachdem $F(x|a)$ eine Poissonsche Verteilung mit dem Mittelwert a bzw. die $a = 0, 1, 2, \dots$ -fache Faltung einer Verteilung $F(x)$ mit sich selbst ist und $U(a)$ eine Verteilung mit $U(0) = 0$ bzw. die Poissonsche Verteilung mit dem Mittelwert x bezeichnet, wird nach Feller bzw. Hartman und Wintner $G(x) = \int_0^{\infty} F(x|a) dU(a)$ die zu $U(a)$ bzw. $F(x)$ assoziierte zusammengesetzte bzw. verallgemeinerte Poissonsche Verteilung genannt. Feller fand letztere mit Neymans verschiedenen „Ansteckungsverteilungen“ identisch. — Hier wird gezeigt, daß 1) beide für sich in dem Sinne eine abgeschlossene Klasse bilden, daß die Faltung $G_1 * G_2$ zweier zu U_1, U_2 assoziierter Elemente zu $U_1 * U_2$ bzw. $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2)/(\alpha_1 + \alpha_2)$ assoziiert ist, 2) beide unendlich teilbar, d.h. als Faltung beliebig vieler Verteilungen derselben Art darstellbar sind, 3) unendlich viele Verteilungen beiden Klassen angehören, 4) die zum III. Pearsonschen Typ assoziierten zusammengesetzten Poissonschen Verteilungen mit den Pólya-Eggenbergerschen, 5) die zur Poissonschen assoziierten mit einer Art der genannten Neymanschen identisch sind.

Szentmártony (Budapest).

Anscombe, F. J.: The transformation of Poisson, binomial and negative-binomial data. Biometrika, Cambridge 35, 246—254 (1948).

Es werden Transformationen bestimmt, welche die Poissonsche bzw. binomische bzw. negativ-binomische (Pascal)-Verteilung in solche Verteilungen überführen, welche bei genügend großem Mittelwert m annähernd normal seien. Ist r die ursprüngliche, einer Poisson-Verteilung mit Mittelwert m folgende Variable, so lauten für die transformierte Variable $y = \sqrt{r} + c$ für $m \rightarrow \infty$ asymptotisch Varianz und Erwartungswert

$$\text{var}(y) \sim \frac{1}{4} \cdot \{1 + (3 - 8c)/8m + (32c^2 - 52c + 17)/32m^2\},$$

$$E(y) \sim \sqrt{m + c} - 1/8m^2 + (24c - 7)/128m^3,$$

und Schiefe und Exzess streben gegen 0 wie

$$\gamma_1 = O(m^{-\frac{1}{2}}), \quad \gamma_2 = O(m^{-1}).$$

Entsprechend gilt für die Transformation

$$y = \sqrt{n + d_2} \cdot \arcsin \sqrt{(r + c)/(n + d_1)}$$

der mit Mittelwert m in $r = 0, 1, \dots, n$ binomial verteilten Variablen r für $n \rightarrow \infty$, m/n konstant,

$$\text{var}(y) \sim \frac{1}{4} \cdot \{1 + (2d_2 - 1)/2n + (3 - 8c)/8m + (3 + 8c - 8d_1)/8(n - m)\},$$

$$\gamma_1 = O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad \gamma_2 = O(n^{-1}).$$

Während diese Resultate durch Reihenentwicklungen von y nach Potenzen von $(r-m)$ gewonnen werden, untersucht Verf. die Wirkung der Transformationen

$$y = 2 \cdot \arcsinh \sqrt{(r+c)/k+d}, \quad y = \ln(r+A)$$

auf die der negativ-binomischen Verteilung

$$p_r = \{ \Gamma(r+k)/r! \Gamma(k) \} \cdot \{ m/(m+k) \}^r \cdot \{ 1+m/k \}^{-k} \quad (r=0, 1, 2, \dots)$$

folgende Variable r für $m \rightarrow \infty, k$ konstant, durch Benutzung der momenterzeugenden Funktion von y

$$M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r e^{yt}.$$

Die Ergebnisse werden an numerischen Beispielen illustriert.

M. P. Geppert.

Feller, W.: On the Kolmogorov-Smirnov limit theorems for empirical distributions. Ann. math. Statist., Ann Arbor **19**, 177—189 (1948).

Einheitliche und vereinfachte Beweise zweier — in der parameterlosen Schätzungstheorie höchst wichtiger — Sätze von Kolmogoroff [Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 83—91 (1933); dies. Zbl. **6**, 174] bzw. Smirnow [Bull. Math. Univ. Moscou, Sér. internat. **2**, 1—16 (1939); dies. Zbl. **23**, 249]. Diese geben mit Hilfe der von Smir-

noff tabulierten Funktion $1 - 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} - e^{-r^2 z^2}$ brauchbare Mutungsgrenzen

der stetigen Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Gesamtheit auf Grund jener einer großen Stichprobe bzw. Schätzung des Unterschiedes zwischen der Verteilungsfunktionen zweier großen Stichproben. — Als neuer, einem Satze des Smirnowschen Ideenkreises in dem Kolmogoroffschen entsprechender Satz ergibt sich folgende Feststellung. Die mittlere Anzahl jener x -Stellen, an welchen die Treppenkurve der zur n -gliedrigen Stichprobe gehörenden Verteilungsfunktion bei festem z den Mutungstreifen $F(x) \pm z n^{-1/2}$ verläßt, ist asymptotisch gleich $2(2\pi n)^{1/2} \{1 - \Phi(2z)\}$ mit der auf den Mittelwert Null und auf die Streuung Eins reduzierten normalen Verteilungsfunktion $\Phi(z)$.

Szentmártony (Budapest).

Lev, Joseph: The point biserial coefficient of correlation. Ann. math. Statist., Ann Arbor **20**, 125—126 (1949).

Die Variable x sei nur der Werte 0 oder 1 fähig, die Variable y sei bei festem x normal verteilt, ρ sei der Korrelationskoeffizient zwischen x, y im Kollektiv. Die Größe

$$t = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0) \sqrt{n-2} \sqrt{n_0 n_1 / n}}{\sqrt{\sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2}},$$

wo in der beobachteten n -gliedrigen Stichprobe \bar{y}_1 bzw. \bar{y}_0 die bedingten Mittelwerte der n_1 bzw. n_0 mit $x=1$ bzw. $x=0$ gepaarten y_{ij} -Werte, \bar{y} der Gesamtmittelwert der y_{ij} ,

$$r = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0) \cdot \sqrt{n_0 n_1 / n}}{\sqrt{\sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2}}$$

der Korrelationskoeffizient ist, folgt einer i. a. unsymmetrischen t -Verteilung mit Mittelwert

$$\delta = \frac{\rho \sqrt{n}}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Die spezielle Hypothese $\rho=0$ wird (wegen $\delta=0$) mittels der symmetrischen Student-Verteilung geprüft. Allgemein lassen sich aus den von N. L. Johnson und B. L. Welch [Biometrika, Cambridge **31**, 362—389 (1940); dies. Zbl. **23**, 148] berechneten Tabellen der unsymmetrischen t -Verteilung Mutungsgrenzen für das unbekannte ρ gewinnen.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

David, F. N.: Correlations between χ^2 cells. *Biometrika*, Cambridge **35**, 418—422 (1948).

Sind p_j ($j = 1, \dots, k$) mit $\sum_j p_j = 1$ die Trefferwahrscheinlichkeiten für k Klassen eines Merkmals, n_j die entsprechenden empirischen Besetzungszahlen einer Stichprobe von $N = \sum_j n_j$ Versuchen und $x_j = n_j - m_j$ die Abweichungen derselben von ihren Erwartungswerten $m_j = Np_j$, so lautet bekanntlich der Korrelationskoeffizient zwischen je zwei x_i, x_j :

$$r_{ij} = -\sqrt{m_i m_j / (N - m_i)(N - m_j)}.$$

Während hier die k Variablen x_j durch eine lineare Relation verknüpft sind, bestimmt Verf. r_{ij} für den allgemeineren Fall, daß die x_j durch p lineare Relationen verknüpft sind, wobei die x_j als um 0 normal verteilt vorausgesetzt werden. Es ergibt sich $r_{ij} = \cos \theta_{ij}$, wo θ_{ij} der Winkel zwischen den Ebenen $x_i = 0$ und $x_j = 0$ im $(k-p)$ -dimensionalen Raum geeignet transformierter Variablen

$$z_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1k-p} x_{k-p},$$

$$z_2 = \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2k-p} x_{k-p},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_{k-p} = \alpha_{k-p, k-p} x_{k-p}$$

ist. Das Resultat findet speziell Verwendung, wenn die zusätzlichen linearen Beziehungen zwischen den x_j , also n_j , durch die geforderte Übereinstimmung empirischer mit theoretischen Momenten der der Klasseneinteilung zugrunde liegenden Variablen gegeben sind. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Simpson, E. H.: Measurement of diversity. *Nature*, London **163**, 688 (1949).

Sind p_1, \dots, p_k die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß bei der Aufteilung einer unendlichen Gesamtheit ein Element in eine der vorgegebenen k Klassen fällt, so wird als Maß der Elementenkonzentration in eine Klasse $\lambda = \sum p_i^2$ eingeführt. Es ist $1/k \leq \lambda \leq 1$. — Als unparteiische, d. h. in ihrem Mittelwert λ ergebende Schätzung von λ auf Grund einer Stichprobe, bei welcher die Klassen sich mit der relativen Häufigkeit n_i/n zeigen, ergibt sich $l = \sum n_i(n_i - 1)/n(n - 1)$ mit einer asymptotischen Streuung $s_l = 4[\sum p_i^3 - (\sum p_i^2)^2]/n$. Die Verteilung von l ist asymptotisch (λ, s_l) normal für $\lambda \neq 1/k$. Die 1944 von Yule eingeführte „Charakteristik“ der Konzentration ergibt sich als $10^3 l(n - 1)/n$. — Zum Schluß wird λ sowohl für die Gamma- als auch deren beide Grenzverteilungen, die Poissonsche und die logarithmische, angegeben. Bei der letzteren ergibt sich $\lambda = 1/(1 + \alpha)$ mit dem 1943 von Fisher eingeführten Dezentrationseizer α . *Szentmártony*.

Plackett, R. L.: Boundaries of minimum size in binomial sampling. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor **19**, 575—580 (1948).

Um zweckmäßige Modelle bzw. Schemata für die statistische Behandlung von Vorgängen sowohl biologischer Natur als auch solcher aus der industriellen Praxis (Großzahlforschung, Aufteilungsprobleme) zu gewinnen, hat man sich in letzter Zeit u. a. besonders auch mit Fragen der Stichprobenerhebung aus Gesamtheiten mit Binomialverteilung befaßt. Für solche Stichprobenprozesse ist es dabei vor allen Dingen erforderlich, die Wahrscheinlichkeiten dafür zu bestimmen, ein Beobachtungsmaterial mit gewissem „Ausschußprozentsatz“ („fraction defective“) zu akzeptieren oder zu verwerfen, ferner die zur Sicherung eines statistischen Ergebnisses durchschnittlich notwendige Stichprobengröße zu ermitteln und schließlich eine Abschätzung des „fraction defective“ zu geben in dem Falle, daß die Stichprobe nicht unbegrenzt genommen werden kann. — Es zeigt sich, daß die Behandlung der drei genannten Problemstellungen auf Ausdrücke in den Größen $N(x, y)$, definiert durch

$$\sum_B N(x, y) p^x (1 - p)^y = 1,$$

führt, wenn p die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des der Binomialverteilung folgenden Ereignisses und B den Bereich der durch die Begrenztheit der Stichproben gegebenen „Randpunkte“ im xy -Koordinatensystem bedeuten. — Die vorliegende Arbeit bringt vor allem die Darstellung einer Methode zur Bestimmung der $N(x, y)$ samt Untersuchung der Bedingungen,

unter denen sie gültig ist, sowie des Zusammenhanges mit dem statistischen Abschätzungsproblem und eines Beispiels zur Illustration der Entwicklungen. — Interessant und zugleich für die Lösung der aufgeworfenen Probleme fruchtbar ist die den Betrachtungen des Verf. letztlich zugrunde liegende geometrische Deutung der Vorgänge. *G. Wünsche* (München).

Walsh, John E.: An extension to two populations of an analogue of Student's t -test using the sample range. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor **18**, 280—285 (1947).

Verf. beweist den folgenden Satz: Es sei \bar{x} der Mittelwert von r Werten aus einer normal verteilten Bevölkerung mit Mittelwert ν und Streuung σ^2 . Ferner seien y_1, \dots, y_n Mittelwerte von je s Werten aus einer normal verteilten Bevölkerung mit Mittelwert μ und Streuung σ^2 . Schließlich sei z der Mittelwert von t Werten aus derselben Bevölkerung. C_1 sei eine gegebene Konstante. Man entscheidet dann, daß $\nu > \mu$ ist, wenn

$$x > (1 - C_1) \bar{y} + C_1 z + [y_{(n)} - y_{(1)}] g_\alpha \sqrt{\left(\frac{1}{r} + \frac{C_1^2}{t}\right) \left(n + \frac{(1 - C_1^2)^2}{s \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{t} C_1^2\right)}\right)}.$$

Hier sind $y_{(n)}$ und $y_{(1)}$ der größte bzw. kleinste Wert unter den y_i , g_α kann aus Tabellen entnommen werden und wurde so berechnet, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man $\nu > \mu$ ablehnt, obwohl es richtig ist, gleich α ist. Man sieht, daß dieser Test dem Studentischen t -test nachgebildet ist, wobei nur die Verteilungsbreite statt der beobachteten Streuung verwendet wird. — Zur Bedeutung der Konstanten C_1 bemerkt Verf., daß sie „gestattet, weniger verlässliche frühere Kenntnisse zu verwenden, indem diese im Ausdruck z zusammengefaßt werden und die Konstante C_1 dazu dient, diese Information mit der ihr vergleichsweise zukommenden Bedeutung zu wägen“. Da aber für alle Werte von C_1 immer wieder dieselbe Formel gilt, scheint dem Ref. dieser Kunstgriff seine Bedeutung erst zu erlangen, wenn man erkennen kann, wie die Verwendung von z und C_1 den Test verbessert. Dies könnte aus einer Untersuchung der Potenz- („power“-) Funktion der Tests mit verschiedenen Werten von C_1 hervorgehen. Verf. untersucht aber nur den Fall $C_1 = 0$, d. h. also den Fall, in dem sein Kunstgriff nicht verwendet wird. Er zeigt, auf Grund einer früheren Arbeit von Daly [*Ann. Math. Statist.*, Ann Arbor **17**, 71—74 (1946)], daß dann sein Test für $n \leq 10$ fast dieselbe Potenz besitzt wie Student's t -test, der bekanntlich für die Entscheidung, ob $\nu > \mu$ ist oder nicht, die größte mögliche Potenz besitzt. — Es werden analoge Aussagen über die Prüfung von $\nu < \mu$ gemacht.

S. Vajda (Epsom/England).

Baker, G. A.: The variance of the proportions of samples falling within a fixed interval for a normal population. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor **20**, 123—124 (1949).

Werden aus einer normal verteilten Gesamtheit (m = Mittelwert, σ^2 = Streuung) Stichproben vom Umfang N entnommen, so kann die relative Häufigkeit p der in den Merkmalsbereich von $m + \lambda\sigma$ bis $m + \mu\sigma$ fallenden Beobachtungen durch $p = n/N$ mit der Streuung $p(1-p)/N$ abgeschätzt werden, wenn n die Anzahl der aus der Stichprobe durch Auszählung bestimmten Beobachtungen, soweit sie in das vorbezeichnete Intervall fallen, bedeutet. Eine bessere Abschätzung gelingt jedoch mit Hilfe des Integrals

$$\frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{m+\lambda\sigma}^{m+\mu\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2s^2} dx, \text{ wobei } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \text{ und } s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Unter Heranziehung des von H. Cramér mitgeteilten Theorems, wonach das Integral asymptotisch die Normalverteilung mit dem Mittelwert p und der durch

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{2\pi N} \left[\frac{(\lambda e^{-\lambda^2/2} - \mu e^{-\mu^2/2})^2}{2} + (e^{-\lambda^2/2} - e^{-\mu^2/2})^2 \right]$$

gegebenen Streuung besitzt, werden in der vorliegenden Note für die praktisch

wichtigen Spezialfälle $\lambda = -\infty$ und $\lambda = -\mu$ einige zahlenmäßige Angaben über das Verhältnis von σ_p zu $p(1-p)/N$ gemacht. — Es zeigt sich, daß die relative Wirksamkeit („efficiency“) von $p(1-p)/N$ in den gewählten Beispielen Werte zwischen 0,75 und 0,12 annimmt.

G. Wünsche (München).

Hoeffding, Wassily: A class of statistics with asymptotically normal distribution. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 293—325 (1948).

Sind X_1, \dots, X_n r -dimensionale unabhängige Zufallsveränderliche mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $F(x)$, wie die Elemente einer n -gliedrigen einfachen Stichprobe aus einer Gesamtheit, und $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ eine reellwertige Funktion von m ($\leq n$) Vektoren mit der Dimension r , dann bildet die Summe $U = \sum \Phi(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_m}) / n(n-1) \dots (n-m+1)$ über alle Permutationen $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ von m verschiedenen ganzen Zahlen $1 \leq \alpha_i \leq n$ eine unparteiische, d. h. als Mittelwert $\Theta(F) = \int \dots \int \Phi(x_1, \dots, x_m) dF(x_1) \dots dF(x_m)$ ergebende Schätzung des Gesamtheitsparameters $\Theta(F)$. Ist m die kleinste Elementenzahl einer Stichprobe, die eine unparteiische Schätzung $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ von $\Theta(F)$ für alle rein unstetigen F zuläßt, dann wird gezeigt, daß U die einzige in x_1, \dots, x_n symmetrische unparteiische Schätzung von Θ ist, die dabei unter allen anderen unparteiischen die kleinste Streuung besitzt. Nach Untersuchung der Streuung $\sigma(U)$ solcher U -Statistiken in Abhängigkeit von n wird gezeigt, daß, wenn $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ von n unabhängig und $E\Phi^2(X_1, \dots, X_m) < \infty$ ist, die Verteilung von $(U - \Theta)/\sqrt{n}$ bzw. $(U - \Theta)/\sigma(U)$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen die reduzierte Normalverteilung strebt. Dasselbe Verhalten zeigt ein System von $U^{(v)}$ -Statistiken, die sich aus verschiedenen $\Phi^{(v)}(x_1, \dots, x_{m(v)})$ ergeben. Diese Ergebnisse lassen sich auch auf verschieden verteilte unabhängige Veränderliche ausdehnen, falls nur gewisse verallgemeinerte Ljapunoffsche Bedingungen erfüllt sind; oder auf Statistiken $U' = U + b_n n^{-\frac{1}{2}}$ mit $\lim E(b_n^2) = 0$. Zum Schluß wird gezeigt, daß Beispiele solcher U - oder U' -Statistiken die Momente, Gini's mittlere Differenz und der Konzentrationskoeffizient sowie verschiedene Rang- und Differenzenvorzeichen-Korrelationen sind. Ferner, daß auf Grund der angeführten Sätze sich asymptotische Stärkekfunktionen für Unabhängigkeits- und Tendenzprüfungen ergeben, sowie die asymptotisch normale Verteilung des Koeffizienten der partiellen Differenzenvorzeichen-Korrelation gezeigt werden kann.

Szentmártony (Budapest).

Pólya, George: Exact formulas in the sequential analysis of attributes. Univ. California, Publ. Math. 1, 229—240 (1948).

In der von A. Wald begründeten „Sequential Analysis“ werden der Reihe nach Gegenstände aus einer Menge zufallsmäßig ausgewählt und als „gut“ oder „schlecht“ klassifiziert. Nach jeder Beobachtung wird in einem Cartesischen Koordinatensystem der Punkt (x, y) eingezeichnet, wobei x die Zahl der bis dahin gefundenen schlechten und y diejenige der guten Gegenstände bedeutet. Die Menge wird als ganzes angenommen oder abgelehnt, je nachdem, ob der erste Punkt, der außerhalb des Gebietes $-h_1 + s(x+y) < x < h_2 + s(x+y)$ fällt, oberhalb oder unterhalb des Gebietes gelegen ist. Wenn der wahre Anteil von „schlechten“ Gegenständen in der Gesamtmenge p ist und die Menge als unendlich betrachtet werden kann, dann ist die Wahrscheinlichkeit für ihre Annahme gleich der Wahrscheinlichkeit, daß eine Irrfahrt, in der die Wahrscheinlichkeit eines Schrittes in der x - (bzw. y -)Richtung p (bzw. $1-p$) ist, durch Verlassen des Streifens nach oben endet. — Verf. gibt ein Verfahren an, nach dem diese Wahrscheinlichkeiten berechnet werden können, falls s rational ist. Es ergibt sich ein Quotient von Polynomen in p und $(1-p)$. Ferner wird gezeigt, wie die Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung und insbesondere die erwartete Weglänge im Streifen berechnet werden können (s. a. nachfolg. Referat).

S. Vajda (Epsom/England).

Robinson, Julia: A note on exact sequential analysis. Univ. California, Publ. Math. 1, 241—246 (1948).

Im Anschluß an die vorsteh. besprochene Arbeit leitet Verf. eine explizite Formel ab für den Fall, daß $s = 1/(1 + b)$ ist, wobei b eine ganze Zahl bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der untersuchten Menge ist dann

$$q^k f_{d-k-1}(pq^b)/f_{d-1}(pq^b), \quad \text{wobei} \quad f_n(z) = \sum_{0 \leq r \leq n/b} \binom{n-rb}{r} (-z)^r$$

und der Streifen diesmal durch $bx + k - d < ay < bx + k$ (a , b und d positive ganze Zahlen, k ganze Zahl, a und b relativ prim) definiert ist. — Wald und seine Mitarbeiter in der Statistical Research Group der California University hatten angenäherte Wahrscheinlichkeiten berechnet, die in der vorliegenden Arbeit mit den nach der genauen Formel berechneten verglichen werden. Zum Schluß gibt Verf. Hinweise, wie die von der genannten Gruppe angegebenen Prüfungspläne verbessert werden könnten.
S. Vajda (Epsom/England).

Stein, Charles and Abraham Wald: Sequential confidence intervals for the mean of a normal distribution with known variance. Ann. math. Statist., Ann Arbor 18, 427—433 (1947).

X_1, X_2, \dots seien voneinander unabhängige und normal verteilte Zufallsveränderliche mit unbekanntem Mittelwert ξ und bekannter Streuung σ^2 . Es soll dann ein „Folge-Verfahren“ (sequential procedure) S angegeben werden, das es ermöglicht, für ξ Mutungsbereiche $(Y - \frac{1}{2}l, Y + \frac{1}{2}l)$ mit gegebener Länge l zu finden, wobei der „Mutungskoeffizient“ (confidence coefficient) $\alpha(S)$ als die größte untere Schranke von $P(Y - \frac{1}{2}l < \xi < Y + \frac{1}{2}l | \xi)$ für alle ξ definiert ist. Wenn ferner $n_0(S)$ die größte erwartete Zahl von Beobachtungen, d. h. die kleinste obere Schranke von $E(n | \xi)$ für alle ξ ist, dann wird S als ein „bestes Verfahren“ bezeichnet, falls für alle S' , für die $\alpha(S') = \alpha(S)$ ist, auch $n_0(S) \leq n_0(S')$ gilt. — Verff. zeigen, daß ein solches bestes Verfahren, wie folgt, konstruiert werden kann: Man wähle einen Wert ν und mache zunächst ν Beobachtungen. Das Verfahren wird dann abgebrochen, falls $\sum_1^\nu X_i^2 - \nu^{-1} \left(\sum_1^\nu X_i \right)^2 > c\sigma^2$, und man setze $Y = \nu^{-1} \sum_1^\nu X_i$. Andernfalls mache man eine weitere Beobachtung und setze $Y = (\nu + 1)^{-1} \sum_1^{\nu+1} X_i$. Durch die Wahl von ν und c kann der Mutungskoeffizient festgelegt werden. Für $c = 0$ ergibt sich das klassische Verfahren mit im Voraus festgelegter Anzahl der Beobachtungen.
S. Vajda (Epsom/England).

Wolfowitz, J.: The efficiency of sequential estimates and Wald's equation for sequential processes. Ann. math. Statist., Ann Arbor 18, 215—230 (1947).

Von einer Zufallsvariablen X mit der von dem Parameter θ abhängigen Verteilungsfunktion $f(x, \theta)$ sei $\omega = x_1, x_2, \dots$ eine unendliche Folge von unabhängigen Beobachtungen. Zu jedem ω sei etwa durch einen Sequenzttest ein ganzzahliges $n(\omega)$ so definiert, daß jedenfalls $n(\omega_1) = n(\omega_2)$ ist, wenn sich ω_1 und ω_2 höchstens von der $(n + 1)$ -ten Stelle an unterscheiden. Die Projektion R_j des Raumes $n(\omega) = j$ auf den Raum der x_1, \dots, x_j sei Borel-meßbar. Zu jedem ω gehöre $\theta^*(x_1, \dots, x_n)$ als Schätzwert von θ mit $E\theta^* = \theta + b(\theta)$, wo $b(\theta)$ der Exzeß (bias) ist. — Regularitätsbedingungen: θ liegt in einem offenen Intervall. $\partial f / \partial \theta$ existiert für alle θ . $E(\partial \log f / \partial \theta) = 0$. $E[\partial \log f / \partial \theta]^2 \neq 0$. Existenz von $E \left(\sum_1^n |\partial \log f(x_i, \theta) / \partial \theta| \right)^2$. Existenz einer über R_j L -integrierbaren Majorante von $\theta^*(x_1, \dots, x_j) \frac{\partial}{\partial \theta} \prod_1^j f(x_i, \theta)$. Gleichmäßige Konvergenz von $\sum_j dt_j(\theta) / d\theta$ bei

$t_j(\theta) = \int_{R_j} \theta^*(x_1, \dots, x_j) \prod_1^j f(x_i, \theta) dx_i$. — Es gilt dann die Abschätzung

$$\sigma^2(\theta^*) \geq \left(1 + \frac{db}{d\theta}\right)^2 / E n \cdot E(\partial \log f(x, \theta) / \partial \theta)^2,$$

was Ergebnisse bei H. Cramér [Mathematical methods of statistics, Princeton 1946] und Girshick, Mosteller und Savage [Unbiased estimates for certain binomial sampling problems, Ann. math. Statist., Ann Arbor 17, 13—23 (1946)] verallgemeinert. — Im Falle mehrerer Parameter $\theta_1, \dots, \theta_l$ möge zusätzlich die Kovarianzmatrix (λ_{ij}) der entsprechenden Schätzwerte θ_i^* die Inverse (λ^{ij}) haben. Dann liegt bei

$$\mu'_{ij} = E n \cdot E \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log f \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log f \right) \text{ das Ellipsoid } \sum_{i,j} \mu'_{ij} (k_i - \theta_i) (k_j - \theta_j) = l + 2$$

im Innern des entsprechend mit den λ^{ij} gebildeten „Konzentrationsellipsoids“, was eine Verallgemeinerung des für $n(\omega) = \text{const}$ angegebenen Resultates von H. Cramér [A contribution to the theory of statistical estimation, Skand. Aktuarietidskrift 29, 85—94 (1946)] darstellt. — In einfacher Weise wird die Fundamentalgleichung von A. Wald [Sequential tests of statistical hypothesis, Ann. math. Statist., Ann Arbor 16, 117—186 (1945)]: $E(Z_n - nw) = 0$ bei $Z_n = \sum_1^n x_i$

und $w = E(x)$ abgeleitet und ergänzt durch folgende Theoreme:

$$E(Z_n - nw)^2 = E n \cdot \sigma^2(x), \quad \text{falls} \quad E \left(\sum_1^n |x_i - w| \right)^2 \text{ existiert.}$$

$$E(Z_n - nw)^3 = E n \cdot E(X - w)^3 + 3\sigma^2 \cdot E(n(Z_n - nw)), \text{ falls } E \left(\sum_1^n |x_i - w| \right)^3 \text{ existiert.}$$

— Haben die x_i verschiedene Verteilungsfunktionen und sind sie abhängig voneinander, so kann die Waldsche Gleichung unter geringen Voraussetzungen ersetzt werden durch: $E \left(Z_n - \sum_1^n v_i \right) = 0$ mit $v_i = E(X_i | n \geq i)$.

Hans Richter (Haltingen/Lörrach).

Harris, T. E.: Note on differentiation under the expectation sign in the fundamental identity of sequential analysis. Ann. math. Statist., Ann Arbor 18, 294—295 (1947).

Sei z eine reelle Zufallsvariable und $\Phi(is) = E e^{izs}$ bei reellem s und $i = \text{imaginäre Einheit}$. Die Reihe z_1, z_2, \dots unabhängiger Beobachtungen ende mit z_n gemäß einer Sequenzvorschrift (vgl. vorsteh. Referat). Es gebe ein M so, daß für $Z_n = \sum_1^n z_v$ gilt: $|Z_N| < M$ für alle $n > N$. Für die positive ganze Zahl k existiere $E z^k$ und $E n^k$; dann ist die formale k -malige Differentiation der A. Waldschen Identität [On cumulative sums of random variables, Ann. math. Statist., Ann Arbor 15, 283—296 (1944)]: $E \{ e^{Z_n is} / \Phi^n(is) \} = 1$ nach s erlaubt. *Hans Richter*.

Savage, L. J.: A uniqueness theorem for unbiased sequential binomial estimation. Ann. math. Statist., Ann Arbor 18, 295—297 (1947).

Sei z eine Zufallsvariable, die mit den Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ der Werte c_1 und c_2 fähig ist. Jede Reihe z_1, z_2, \dots unabhängiger Beobachtungen werde gemäß einem Sequenztest (vgl. vorletztes Referat) mit z_n beendet, wobei y -mal der Wert c_1 angenommen werde. Bei vorgegebenem (n, y) sei $k(n, y)$ die Anzahl der Sequenzen mit diesen Werten und $k^*(n, y)$ die Anzahl derjenigen unter ihnen, die $z_1 = c_1$ haben. Dann ist nach Girshick, Mosteller und Savage [Unbiased estimates for certain binomial sampling problems, Ann. math. Statist., Ann Arbor 17, 13—23 (1946)]: $\theta = k^*/k$ ein exzeßfreier (unbiased) Schätzwert von p . In Erweiterung eines Theorems von J. Wolfowitz [On sequential binomial

estimation, Ann. math. Statist., Ann Arbor 17, 489—493 (1946)] wird gezeigt, daß θ genau dann der einzige exzeßfreie Schätzwert für alle p ist, wenn der Sequenztest einfach ist im Sinne von Wolfowitz [a. a. O.]. *Hans Richter.*

Blackwell, D. and M. A. Girshick: A lower bound for the variance of some unbiased sequential estimates. Ann. math. Statist., Ann Arbor 18, 277—280 (1947).

Ein „Folgeverfahren“ (sequential procedure) bestehe darin, daß eine Folge von unabhängigen Zufallsveränderlichen x_1, x_2, \dots mit identischen Verteilungsfunktionen und Erwartungswert $E x_i = \theta$ betrachtet und nach jedem Schritte die Summe $x_1 + x_2 + \dots + x_k = W_k$ berechnet wird. Es wird ferner angenommen, daß W_k ein „erschöpfender“ (sufficient) Ausdruck für die Schätzung von θ auf Grund von x_1, x_2, \dots, x_k ist. Es wurde in einer früher geschriebenen, aber noch nicht veröffentlichten Arbeit des erstgenannten Verf. bewiesen, daß, falls nur diejenigen Fälle betrachtet werden, die nach genau n Schritten beendet wurden und die einen gegebenen Wert von W_k ergaben, der Erwartungswert $V = E(x_1 | W, n)$ von x_1 ein „gerechter“ (unbiased) Schätzwert von θ ist. Z. B. ist beim klassischen Verfahren, bei dem n einen im Vorhinein festgelegten Wert hat, der als Spezialfall eines Folgeverfahrens aufgefaßt werden kann, $V = E(x_1 | W, n) = W_n/n$, und dies ist in der Tat ein gerechter Schätzwert für θ . In diesem letzteren Falle ist offensichtlich $\sigma^2(V) = \sigma^2(x_1)/n$. Verf. beweisen, daß diese Formel ein Spezialfall des für alle Folgeverfahren der genannten Art geltenden Satzes $\sigma^2(V) \geq \sigma^2(x_1)/E(n)$ ist und daß das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn der beschriebene Spezialfall vorliegt. Dann und nur dann ist auch der Korrelationskoeffizient zwischen V und $W - \theta n$ gleich Eins. [Daß $\sigma^2(V) \leq \sigma^2(x_1)$ ist, war schon in der früheren Arbeit bewiesen worden.] *S. Vajda (Epsom/England).*

Silber, Jack: Multiple sampling for variables. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 246—256 (1948).

Die Arbeit befaßt sich mit der Diskussion des folgenden Schemas für Vielfachstichproben („multiple“ oder „sequential sampling“), wie es einer statistischen Prüfung der Gültigkeit gewisser Hypothesen (z. B. Nullhypothese in bezug auf den Mittelwert) zugrunde zu legen ist: Für eine erste Variable x_1 möge im Falle $x_1 > b$ die zu prüfende Hypothese als bestätigt gelten, während sie für $x_1 < a$ zu verwerfen sei. Für $a \leq x_1 \leq b$ werde eine zweite Variable x_2 ausgewählt und nun bezüglich $x_1 + x_2$ in gleicher Weise erneut untersucht, ob die Hypothese angenommen werden kann oder der Ablehnung zu verfallen hat. Das Verfahren wird jeweils

unter Bildung der kumulierten Summen $S_r = \sum_{i=1}^r x_i$ so lange fortgesetzt, bis sich entweder $S_r > b$ oder $S_r < a$ ergibt und damit das statistische Urteil feststeht. — Unter Zugrundelegung einer stückweise kontinuierlichen Häufigkeitsfunktion (Wahrscheinlichkeitsdichte) $P(x)$ für die Zufallsvariable x werden Formeln sowohl für die Wahrscheinlichkeit einer Bestätigung bzw. Ablehnung der zu untersuchenden Hypothese als auch für die Anzahl der zur Entscheidung notwendigen Stichproben abgeleitet. — Mathematisch besonders interessant ist die Abhängigkeit der besagten Beziehungen von der Lösung einer Fredholm'schen Integralgleichung 2. Art. Explizite Lösungen des Problems werden vom Verf. für den Fall einer Rechtecksverteilung $P(x)$ durch Reduktion der grundlegenden Integralgleichung auf ein System von Differential-Differenzgleichungen gewonnen und an einigen Beispielen ausführlich durchgerechnet. — Nach einer Bemerkung des Verf. am Schluß der Arbeit bereiten jedoch schon die Fälle der Dreiecksverteilung und einer parabolischen Häufigkeitsfunktion erhebliche rechnerische Mühen, ebenso wie nach Kac [Ann. math. Statist., Ann Arbor 16, 6:—67 (1945)] auch die Annahme einer Normalverteilung für $P(x)$ für die Gewinnung von Lösungen des Problems in geschlossener Form zu außerordentlichen Schwierigkeiten bei der Durchrechnung führt. — Angesichts dieser Tatsache wäre nach Auffassung des Ref. gerade mit Rücksicht auf den letztgenannten, praktisch wohl bedeutsamsten Fall der Normalverteilung zu untersuchen, ob sich nicht durch Entwicklung eines geeigneten graphischen bzw. nomographischen Verfahrens zur rationalen Behandlung der maßgebenden Beziehungen eine mühelosere Auffindung der zahlenmäßigen Ergebnisse ermöglichen ließe.

G. Wünsche (München).

Paulson, Edward: A multiple decision procedure for certain problems in the analysis of variance. Ann. math. Statist., Ann Arbor 20, 95—98 (1949).

An K Veränderlichen werden je n Beobachtungen vorgenommen und deren Mittelwerte x_i berechnet. Es soll entschieden werden, ob diese Mittelwerte im

wesentlichen einander gleich sind, oder ob sie in eine „höhere“ und eine „niedrigere“ Gruppe eingereiht werden sollen. Verf. schlägt vor, in die höhere Gruppe alle diejenigen Veränderlichen einzureihen, für die \bar{x}_i in das Intervall $[\bar{x}_M - \lambda\sigma/\sqrt{r}, \bar{x}_M]$ fällt. Hier bedeutet \bar{x}_M den größten der Werte \bar{x}_i , σ ist die als bekannt und für alle Veränderliche gleich angenommene Streuung der Beobachtungswerte und λ eine noch zu bestimmende Konstante. Von ihrer Wahl hängt die Wahrscheinlichkeit einer richtigen oder falschen Klassifizierung ab. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich aus der Regel zwei Gruppen ergeben, während in Wahrheit alle \bar{x}_i einander gleich sind, läßt sich, unter der Annahme von normal verteilten Beobachtungsfehlern, aus Tabellen ableiten, die von E. S. Pearson und H. O. Hartley in *Biometrika*, Cambridge 32, 301—310 (1942) veröffentlicht wurden. Dieselben Autoren haben in *Biometrika*, Cambridge 33, 89—99 (1943) Tafeln veröffentlicht, die sich verwenden lassen, wenn σ unbekannt ist und aus den Beobachtungsergebnissen geschätzt werden muß. Diese Tafeln werden demnach bei der Wahl von λ die Grundlage bilden. — Verf. berechnet auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß irrtümlich alle Veränderlichen in dieselbe Gruppe eingereiht werden, während in Wirklichkeit eine der Veränderlichen einen höheren Mittelwert hat. Die Ausdrücke sind recht kompliziert, und es gibt auch keine Tafeln, die bei der numerischen Auswertung helfen könnten. Die Wahrscheinlichkeiten anderer möglicher falscher Klassifizierungen werden nicht untersucht und auch nicht die Frage, ob der vorgeschlagene Test gegenüber anderen, denkbaren, irgendwelche optimalen Eigenschaften aufweist. Es wäre auch interessant, zu wissen, was der Test ergibt, wenn man auf Grund der üblichen Streuungsanalyse alle Veränderlichen in dieselbe Gruppe einreihen würde.

S. Vajda (Epsom/England).

McCarthy, Philip I.: Approximate solutions for means and variances in a certain class of box problems. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 18, 349—383 (1947).

Eine Reihe von Anwendungen mathematisch-statistischer Methodik (z. B. bei der Behandlung gewisser Aufteilungsprobleme in der Stichprobenforschung, bei Glücksspielen, bei der Teilchenbewegung u. a. m.) führt zu folgender Schematisierung des zugrunde liegenden kombinatorischen Sachverhalts: Es sind n Kästen vorhanden, von denen jeder die Wahrscheinlichkeit p_i und die ganze Zahl k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) zugeordnet erhält. Wenn nun in diese Kästen nacheinander Bälle so geworfen werden, daß die Wahrscheinlichkeit p_i dafür besteht, daß ein Ball in den i -ten Kasten fällt, so ist die Zahl der Bälle, welche geworfen werden müssen, damit erstmalig wenigstens k_1 Bälle in den i_1 -ten Kasten, k_2 Bälle in den i_2 -ten Kasten, \dots k_s Bälle in den i_s -ten Kasten fallen, eine Zufallsvariable $N_s[k_1(p_1), k_2(p_2), \dots, k_n(p_n)]$. Hierin bedeuten i_1, i_2, \dots, i_s die Anzahlen in jedem Satze von s Kästen ($1 \leq s \leq n$), der zuerst der gestellten Bedingung genügt. Wenn auch grundsätzlich die Verteilung von $N_s[k_1(p_1), k_2(p_2), \dots, k_n(p_n)]$ für irgendeine Verbindung der Werte n, s, k_i, p_i sofort angeschrieben werden kann, so zeigt es sich doch, daß für die Verteilungsfunktion schon im Falle $n > 2$ ein so außerordentlich komplizierter Multinomial-Ausdruck resultiert, daß — außer in gewissen Spezialfällen — nicht einmal mehr der Mittelwert der Verteilung mit einem erträglichen Arbeitsaufwand numerisch zu berechnen ist. — In der vorliegenden Arbeit werden nun für die beiden Verteilungen $N_1[k_1(p_1), k_2(p_2)]$ und $N_2[k_1(p_1), k_2(p_2)]$ die Momente exakt dargestellt in einer Form, wie sie zu zahlenmäßigen Auswertungen geeignet ist, und es wird gezeigt, wie die gewonnenen Ergebnisse herangezogen werden können, um auch in gewissen Fällen, in denen $n > 2$, Näherungswerte für Mittelwert und Streuung der Verteilungen zu erhalten. Insbesondere werden Näherungsformeln entwickelt 1. für Mittelwert und Streuung, wenn n sowie die k_i und p_i beliebig gewählt werden, jedoch $s = 1$ oder n und 2. für den Mittelwert bei beliebigem n und $2 \leq s \leq n-1$, sofern $p_i = 1/n$ und $k_i = k$ ($i = 1, 2, \dots, n$). — Im Hinblick auf die praktische Verwendung der abgeleiteten Beziehungen ist bemerkenswert, daß in der Arbeit gleichfalls eine eingehende Untersuchung der Güte der Approximationen geliefert wird, besonders auch der Bedingungen für das Auftreten eines Minimal- oder Maximalfehlers. Daß sich der Verf. sowohl für die numerische Behandlung der Probleme als auch zur Auswertung gewisser Fehlerfunktionen ausgiebig der Darstellung der Zusammenhänge in Kurvenschartafeln, z. T. unter Heranziehung von Dreieckskoordinaten, bedient, erhöht die praktische Verwertbarkeit der gegebenen Entwicklungen wesentlich.

G. Wünsche (München).

Housner, G. W. and J. F. Brennan: The estimation of linear trends. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 19, 380—388 (1948).

Ein Problem, das bei der statistischen Forschungsarbeit nicht selten erwächst, ist die Be-

rechnung linearer Trends. — Dabei wird angenommen, daß eine Beziehung der Gestalt

$$a + b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + \dots = 0$$

zwischen den beobachteten Werten $x_{ik} = X_i + \varepsilon_{ik}$, $y_{ik} = Y_i + \eta_{ik}$ usw. existiert, wobei die x_{ik} , y_{ik} usw. Zufallsvariable mit den Mittelwerten X_i , Y_i usw. sind und $k = 1, 2, \dots, N_i$ beobachtete Werte von x , y usw. zum Mittelwert X_i , Y_i usw. gehören. Es handelt sich dann darum, die Koeffizienten a, b_1, b_2, \dots zu berechnen, eine Aufgabenstellung, wie sie u. a. auch von A. Wald [Ann. math. Statist., Ann Arbor 11, 284—300 (1940); dies. Zbl. 23, 344] eingehend behandelt worden ist. Die Hauptschwierigkeit liegt bei allen vorgeschlagenen Methoden zur Erledigung dieses Problems darin, daß es stets von vornherein einer Kenntnis der Streuungen der Zufallsvariablen bedarf. Wenngleich z. B. von A. Wald auch eine Möglichkeit aufgezeigt wurde, diese Schwierigkeit zu umgehen, so zeigt es sich, daß die zur Lösung des Problems entwickelte statistische Maßzahl für die Regression jedoch gerade in den uns in der Praxis begegnenden Fällen eine zu geringe Wirksamkeit („efficiency“) aufweist. — In der vorliegenden Arbeit wird nun für eine zweidimensionale („bivariate“) Zufallsverteilung wiederum ein neues statistisches Regressionsmaß abgeleitet, das einmal „maßstabsinvariant“ ist und zum anderen unter Verzicht auf die Kenntnis der Verteilungsparameter der Zufallsvariablen zu einer statistischen Abschätzung mit höherer Wirksamkeit führt. Es wird gezeigt, daß das vom Verf. vorgeschlagene Maß „consistent“ ist. Für den Fall normal verteilter Zufallsvariablen wird ferner seine asymptotische Verteilung entwickelt. Abschließend illustriert ein Zahlenbeispiel durch Vergleich mit anderen bisher angewandten Methoden die bereits erwähnte höhere Wirksamkeit des behandelten Verfahrens.

G. Wünsche (München).

Walsh, John E.: Concerning the effect of intraclass correlation on certain significance tests. Ann. math. Statist., Ann Arbor 18, 88—96 (1947).

In der Arbeit wird gezeigt, daß einige bekannte und häufig verwendete statistische Maßgrößen mit t - bzw. χ^2 - bzw. F -Verteilung, wenn die beobachteten Werte eine Zufallsstichprobe bilden, auch für „korrelierte“ Stichproben noch diese Verteilungen besitzen, sofern man die Maßzahlen mit geeigneten Faktoren multipliziert. — Unter einer „korrelierten“ Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n aus einer normal verteilten Gesamtheit mit n Merkmalsklassen versteht man dabei eine solche, bei der jede der n Veränderlichen den Mittelwert μ und die Streuung σ^2 besitzt und zwischen je zweien der Variablen die Korrelation ρ existiert. Ebenso werden zwei Stichproben x_1, x_2, \dots, x_n und y_1, y_2, \dots, y_m als „korreliert“ bezeichnet, wenn sie eine normale „multivariate“ Verteilung haben, so daß den x -Werten der Mittelwert μ , die Streuung σ^2 und die Korrelation ρ , den y -Werten der Mittelwert μ' , die Streuung σ'^2 und die Korrelation ρ' zukommt. Zwischen jedem x - und jedem y -Wert besteht überdies die Korrelation ρ'' . — Einige gemeinhin benutzte Konfidenz-Intervalle und Signifikanz-Tests, die sich auf die in der Arbeit behandelten statistischen Maßzahlen gründen und unter der Voraussetzung ausschließlicher Zufallswirkung abgeleitet sind, werden betrachtet, und es sind zahlenmäßige Beispiele dafür angegeben, wie sich die Konfidenz-Koeffizienten und Signifikanz-Grenzen ändern, wenn es sich nicht mehr um reine Zufallsstichproben, sondern um „korrelierte“ Stichproben handelt. So wird in einem Falle bei einem bestimmten Stichprobenumfang etwa festgestellt, daß die Signifikanzgrenze für $\rho = 0,05$ bei 0,23 liegt, während sich für $\rho = 0$ ein Wert von 0,05 ergeben würde. Die Entwicklungen erweisen u. a. auch, daß der Einfluß einer in den Stichproben vorhandenen Korrelation bei den χ^2 - und F -Tests nicht ebenso groß ist wie bei dem betrachteten t -Test. — Im Anschluß an die durch eine Reihe instruktiver Zahlenbeispiele besonders deutlich gemachten Ergebnisse bringt Verf. am Schluß der Arbeit noch eine für den Leser recht wertvolle Zusammenfassung der analytischen Herleitung der von ihm in den vorangehenden Abschnitten entwickelten Verteilungstheoreme.

G. Wünsche (München).

Kempthorne, O.: The factorial approach to the weighing problem. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 238—245 (1948).

Das auf F. Yates [The design and analysis of factorial experiments, Techn. Commun. Nr. 35, Imp. Bureau Soil Sci., Harpenden, Herts, England, 1937] zurückgehende 2^n -Schema (2^n factorial system) für die Analyse der Effekte und Interaktionen von n Faktoren wird mit Benutzung der neuen Symbolik des Verf. (vgl. dies. Zbl. 29, 309] übersichtlich dargestellt. Auf gruppentheoretischer Basis werden aus den 2^n Meßkombinationen 2^p Klassen gebildet und die Messung auf einen Repräsentanten jeder Klasse beschränkt (fractional replication). Die erhaltenen Ergebnisse sind dann Summen oder Differenzen von 2^{n-p} Effekten und Interaktionen, wovon bei geeigneter Klasseneinteilung alle bis auf einen nur Interaktionen so hoher Ordnung sind, daß sie a priori gleich Null gesetzt werden können. In diesem Falle liefert die Fraktionalkomplikation bereits alle gesuchten Effekte und Interaktionen. — Anwendung auf das Problem der Wägung von 10 Gegenständen, wo

alle Interaktionen gleich Null angesetzt werden dürfen: Aus den 1024 Wägekombinationen (einschließlich der Nullpunktfeststellung) kann man 16 Klassen bilden, aus denen sich die 10 gesuchten Gewichte mit der Varianz (Streuungsquadrat) $\sigma^2/16$ bei Benutzung einer chemischen Waage ($\sigma^2/4$ bei einer Federwaage) ergeben, wenn σ^2 die Varianz der Einzelwägung ist. Die Ergebnisse sind unkorreliert. — Die Varianzen sind etwas größer als bei dem Verfahren von A. M. Mood [On Hoteling's weighing problem, Ann. math. Statist., Ann Arbor 17, 432—446 (1946)], das aber korrelierte Ergebnisse liefert und einen systematischen Wägefehler nicht mit eliminiert.

Hans Richter (Haltingen/Lörrach).

Malmquist, Sten: A statistical problem connected with the counting of radioactive particles. Ann. math. Statist., Ann Arbor 18, 255—264 (1947).

Bei der Registrierung einer Impulsfolge durch ein Zählwerk mit der Registrierungs- oder Trennzeit u wird aus einer Folge von zufälligen Ereignissen $\{f\}$ eine Teilfolge $\{g\}$ so erfaßt, daß auf ein $g = f = k$ als nächstes jenes f folgt, das nach k und Ablauf von u zuerst innerhalb $\{f\}$ erscheint. Unterliegt der zeitliche Abstand t der Nachbarelemente von $\{f\}$ dem Verteilungsgesetz $F(t)$, so wird gezeigt, daß sich

jenes von $\{g\}$ zu $G(t) = 0$ bzw. $F(t) - F(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^n [F(t-x) - F(u-x)] dF_n(x)$ ergibt, je nachdem $t \leq$ bzw. $> u$ ist. Hierbei ist $F_1(t) = F(t)$ und $F_n(t) = \int_0^t F_1(t-x) dF_{n-1}(x)$, also dem Verteilungsgesetz des zeitlichen Abstandes zwischen

dem ersten und letzten unter $n+1$ aufeinander folgenden Elementen von $\{f\}$. Für die Wahrscheinlichkeit, n Elemente von $\{f\}$ während der Zeit T zu erfassen, ergibt

sich $\frac{1}{m} \int_0^t (1 - F(x)) \int_0^{T-x} [1 - F(T-x-y)] dF_{n-1}(y) dx$ mit dem Mittelwert $m = \int_0^{\infty} t dF(t)$.

Durch die erhaltenen allgemeinen Formeln läßt sich nun auch die kaskadenartige Auswahl bzw. Registrierung behandeln. Der Fall $F(t) = 1 - e^{-at}$ wird theoretisch und an einer Zahlentafel für zufällige Stichprobenerhebungen auch experimentell untersucht.

Szentmártony (Budapest).

Finney, D. J. and W. L. Stevens: A table for the calculation of working probits and weights in probit analysis. Biometrika, Cambridge 35, 191—201 (1948).

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Kendall, David G.: On the role of variable generation time in the development of a stochastic birth process. Biometrika, Cambridge 35, 316—330 (1948).

Verf. untersucht einen stochastischen Vermehrungsprozeß, bei dem die „Lebensdauer“ [generation time = Zeitspanne zwischen der „Geburt“ und der „Teilung“ (parenthood) eines im übrigen unsterblichen Individuums] wie χ^2 mit $2k$ Freiheitsgraden verteilt ist. Dieser „Mehrphasenprozeß“ enthält als Spezialfall für $k=1$ den von W. Feller [Die Grundlagen der Volterra'schen Theorie des Kampfes ums Dasein in wahrscheinlichkeitstheoretischer Behandlung. Acta biotheor., Leiden A 5, 11—39 (1939); dies. Zbl. 21, 340] zuerst betrachteten einfachen Vermehrungsprozeß und für $k \rightarrow \infty$ die rein determinierte Form der Vermehrung, bei der sich die Gesamtheit der Individuen in festen Zeitabständen verdoppelt. Ein kurzer Vergleich mit der Verteilung der Lebensdauern für Bacterium aerogenes zeigt, daß hier ein k von der Größenordnung 20 eine gute Näherung ergibt. — Die Ableitung der Wahrscheinlichkeitsfunktion für die nach der Zeit T aus einem Individuum hervorgegangene Anzahl n der Individuen selbst gelingt zwar für $k > 1$ nicht, die gewonnene erzeugende Funktion gestattet es aber, Aussagen über den Mittelwert und die Streuung von n , insbesondere bei großem T und k , zu machen sowie die Annäherung der Verteilung von n bei großem k an die Normalverteilung zu zeigen. Abschließend wird noch gezeigt, daß für eine große Klasse von derartigen stochastischen Vermehrungsprozessen der Variationskoeffizient der Anzahl n der Individuen in der Grenze näherungsweise gleich dem Variationskoeffizienten der Lebensdauer ist, wenn diese nur so gering ist, daß der betreffende Prozeß sich der rein determinierten Form nähert.

Georg Friede.

Solomon, Leon: The analysis of heterogeneous mortality data. J. Inst. Actuaries 74, 94—112 (1948).

Aus dem Material des britischen Continuous Mortality Investigation Committee werden die Alter 46—55 für ärztlich untersuchte Leben mit abgelaufener Versicherungsdauer von mindestens 5 Jahren herausgegriffen und nach den drei Gruppen von Beobachtungsjahren 1924—28, 29—33 und 34—38 und auch nach den vier Versicherungsformen Todesfallversicherung mit und ohne Gewinnanteil und gemischte Versicherung mit und ohne Gewinnanteil unterteilt. Verf. benützt moderne statistische Methoden, um zu untersuchen, ob die beobachtete Streuung von der aus der Anwendung des Binomialsatzes zu erwartenden wesentlich abweicht (diese Frage wird bejaht) und ob die beobachteten Durchschnittsterblichkeiten voneinander wesentlich verschieden sind. Für die letzteren werden auch Mutungsgrenzen aufgestellt. Ferner ergeben sich die folgenden wesentlichen Resultate: (i) Die Quadratwurzeln der beobachteten Sterblichkeiten lassen sich in allen Untergruppen als eine lineare Funktion des Alters darstellen. (ii) Die Abhängigkeit von der Beobachtungszeit war in den vier Versicherungsgruppen wesentlich verschieden. — Die Arbeit ist interessant, weil sie zu den wenigen gehört, die in die Technik der britischen Sterblichkeitsanalyse mathematisch-statistische Methoden einzuführen versucht.

S. Vajda (Epsom/England).

Hage, Joh.: Reservenberechnung gruppenweise für Witwenpensionsversicherungen. Verzekerings-Arch. 27, 170—178 (1948) [Holländisch].

Anknüpfend an Artikel von v. d. Weg und Grotenboer im Verzekeringsbode, Sept. und Okt. 1947, von Grotenboer auch im Verzekerings-Arch. 27, 99—144 (1947; dies. Zbl. 29, 276) untersucht Verf. auf Grund seiner langjährigen Erfahrung mit der sog. Konstantenmethode und der Berechnung von Witwenpensionen numerisch für ein Ehepaar (xy) mit $x = 30$, $y = 24, 25, \dots, 29$; $n = 35$ die Werte $A_{zz\overline{n}|}$ und a_{zz} nach drei Annäherungsverfahren. Das gemeinsame Alter z wird aus einer nach Makeham ausgeglichenen Tafel bestimmt gemäß der Gleichung $c^x + c^y = 2c^z$. Um Tabellenwerte benützen zu können, wird z durch z' ersetzt, wo $z' < z < z' + 1$. — Bei einer numerischen Untersuchung über Reserveprämien wird z' durch die nächste ganze Zahl ersetzt. Für die Gruppenreserve werden zwei Arten erörtert mit Fehlerabschätzung. „Beide Arten haben Vorteile und Nachteile, die aber praktisch nicht zu beachten sind.“

Lorey (Frankfurt a. M.).

Bayley, G. V.: Some relationships between extra premiums. J. Inst. Actuaries 74, 86—90 (1948).

C. F. Wood hat für den Zuschlag F zur Einmalprämie der Todesfall- und gemischten Versicherung, der wegen eines besonderen Risikos nötig ist, die Formel gegeben: $F = f \cdot (1 - A) a'$, wo f der jährliche Prämienzuschlag für den Barwert der Leistung $(1 - A)$ ist und a' auf Grund einer besonderen Sterbetafel berechnet werden muß. Verf. eliminiert a' und erhält so $F = f \cdot (1 - A) a / (1 + fa)$. Die an sich nahe liegende Umformung hat er im Schrifttum nicht gefunden. Erläuterung an einigen numerischen Beispielen.

Lorey (Frankfurt a. M.).

Niessen, Abraham M.: Actuarial estimates for public sickness insurance plans. J. Amer. statist. Assoc. 43, 61—73 (1948).

Vorschläge für eine allgemeine Arbeiter-Krankenversicherung, wobei Verf. für die versicherungsmathematischen Formeln sich auf die von Rusam dem für 1940 geplanten 12. Internat. Aktuarkongreß in Luzern vorgelegte Arbeit: „Grundzüge der Mathematik der privaten Krankheitskostenversicherung“ bezieht. Lorey.

Alarcao, J.: Einige Prinzipien der quantitativen Untersuchung in den Sozialwissenschaften. Rev. Economia, Lisboa 1, 92—98 (1948) [Portugiesisch].

Beschreibung einiger der neuzeitlichen zur Ökonometrie führenden mathematischen Verfahren. Die von Ragnar Frisch begründete und durch seine Zeitschrift „Econometrica“, das Organ der Internationalen „Econometric Society“ (seit 1931) vertretene Wissenschaft wird aber nicht erwähnt. Lorey (Frankfurt a. M.).

Ródrigues, Remulo: Über das Gleichgewicht des Konsums. Rev. Economia, Lisboa 1, 165—167 (1948) [Portugiesisch].

Gleichgewichtsbedingung im Anschluß an die spanische, jetzt auch in deutscher Sprache vorliegende Schrift Principios de teoria económica von H. Stackelberg und an die in Harvard Economic Studies 1948 erschienenen Foundations of economic analysis von P. A. Samuelson.

Lorey (Frankfurt a. M.).